THE Trachtenberg SPEED SYSTEM OF Basic Mathematics

TRANSLATED AND ADAPTED
BY ANN CUTLER
AND RUDOLPH McSHANE

SOUVENIR PRESS

Э. КАТЛЕР и Р. МАК-ШЕЙН

Система быстрого счета по Трахтенбергу

СОКРАЩЕННЫЙ ПЕРЕВОД
С АНГЛИЙСКОГО
П. Г. КАМИНСКОГО И Я. О. ХАСКИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ» Москва 1967

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Предлагаемая вниманию читателя книга посвящена получившей за последние годы широкую известность в ряде стран «системе быстрого счета», разработанной проф. Я. Трахтенбергом, — своего рода «математической стенографии», призванной облегчить, рационализировать и обеспечить большую надежность как практическим вычислениям, так и обучению им в школе.

Книга выдержала большое количество изданий на немецком и английском языках в Швейцарии, Великобритании, США и других странах. При переводе ее на русский язык (с английского издания 1963 г.) были опущены многочисленные повторения, длинноты и не относящиеся к сути дела комментарии, носящие местами несколько рекламный характер. В то же время никаких попыток изменить систему изложения, как таковую, не делалось, хотя она далека от совершенства; особенно это относится к «теоретическим основаниям» метода и авторским характеристикам излагаемой системы.

Впрочем, книга эта, отнюдь не являющаяся ни систематическим монографическим исследованием, ни методическим руководством, безусловно будет интересна и полезна содержащимся в ней фактическим материалом самому широкому кругу читателей. И в первую очередь—школьному учителю математики и особенно учителю начальных классов. Конечно, мы вовсе не говорим о каком-либо «внедрении» излагаемых методов. Их надо прежде всего критически осмыслить, для чего, в свою очередь, надо знать, о чем идет речь. Именно эту информационную цель и имело главным образом издательство, адресуя книгу в качестве пособия школьным учителям.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга представляет собой первое печатное изложение «системы быстрого счета» — совокупности методов быстрых и рациональных вычислений, разработанных покойным руководителем Цюрихского математического института профессором Яковом Трахтенбергом. (В тех немногих случаях, когда в изложение системы Трахтенберга мы сочли целесообразным включить некоторые известные ранее приемы, это обстоятельство каждый раз специально оговаривается.)

Профессор Трахтенберг был человеком замечательным и многогранно одаренным. Родился он в Одессе в 1888 г. По образованию — инженер (окончив с отличием Петербургский горный институт, он был главным инженером Обуховского судостроительного завода). Убежденный пацифист, Трахтенберг отдавал много сил пропаганде своих взглядов и в России, и в Германии, где он жил с 1919 г., а затем в Австрии, куда он бежал после прихода к власти Гитлера. Интересы его были чрезвычайно разнообразны. Так, ему принадлежит оригинальный метод преподавания иностранных языков, нашедший признание и широкое распространение в Германии.

После аншлюса для Трахтенберга наступил семилетний период пребывания в тюрьмах и лагерях. Он был арестован фашистами и заключен в концентрационный лагерь. С помощью жены ему удалось бежать в Югославию. Но гестаповцы вскоре настигли его и там. Находясь в страшных, нечеловеческих условиях, Трахтенберг, стремясь сохранить здоровый дух и психику, всецело ушел в замкнутый мир чисел. «Система быстрого счета» — плод его размышлений за эти страшные годы.

Когда в 1944 г. стало известно о его предстоящей казни, его верный друг — жена сумела еще раз спасти его. Она добилась перевода мужа в Лейпциг и там снова организовала побег. И хотя вскоре он был снова арестован и отправлен на каменоломню в Триест, самое тяжелое осталось позади. Последний побег — и супруги Трахтенберг в Швейцарии.

В конце 40-х годов Трахтенберг организовал в Цюрихе свой Математический институт — единственное в своем роде учебное заведение, где дети и взрослые учились и переучивались считать по его методу, и по единодушному признанию успехи были поразительны.

Суть приемов, разработанных профессором Трахтенбергом, очень проста. Но конечно, как на всякое новое дело, на усвоение их (особенно когда речь идет о взрослых людях, которым приходится, переучиваясь, отказываться от прежних привычек) требуется и время, и известное напряжение.

С помощью своего метода Трахтенбергу удалось научить многих детей, ранее считавшихся умственно отсталыми (во всяком случае, по части математики), превосходно, быстро и надежно вычислять. Более того, обнаружилось, что у этих детей (как, впрочем, и у всех учеников Трахтенберга) увлечение легкостью и простотой его «волшебных» приемов неизменно перерастало в интерес к математике и к учению вообще.

Система Трахтенберга уже оказала свое влияние не только на школьное преподавание, но и на практику банковских расчетов, причем не только в Швейцарии. Специалисты предсказывают ей большую будущность.

Мы надеемся, что читатель сможет из изложенного ниже усвоить систему Трахтенберга и оценить ее по достоинству.

Глава первая

НУЖНА ЛИ ТАБЛИЦА УМНОЖЕНИЯ?

В предисловии мы уже обсудили цели метода Трахтенберга. Перейдем теперь к рассмотрению самого метода. Первый пункт наших занятий — новый способ выполнения основных видов умножения: мы будем умножать, не пользуясь заучиваемой наизусть таблицей умножения. Это не только возможно, но и легко.

Впрочем, необходимо пояснить: мы не против таблицы умножения. Большинство людей знают ее довольно хорошо, даже отлично, за исключением нескольких неясных случаев. Так, восемью семь или шестью девять некоторых слегка смущает, но с меньшими числами, например четырежды пять, легко справляется любой. Мы за то, чтобы пользоваться этими тяжким трудом приобретенными знаниями, и намереваемся даже их закрепить. Несколько ниже мы еще вернемся к этому вопросу. А пока займемся некоторыми видами умножения, не пользуясь таблицей умножения.

УМНОЖЕНИЕ НА ОДИННАДЦАТЬ

Основные правила умножения на 11 заключаются в следующем:

1. *Последняя цифра множимого (число, которое умножается) записывается как самая правая цифра результата.*

2. *Каждая следующая цифра множимого складывается со своим правым соседом и записывается в результат.*

3. *Первая цифра множимого становится самой левой цифрой результата. Это последний шаг.*

По системе Трахтенберга вы пишите результат, по одной цифре справа налево, точно так, как вы это делали ранее. Рассмотрим следующую простую задачу: 633 умножить на 11:

$$\underline{633} \times 11$$

Ответ пишется под 633, по одной цифре справа налево, как указано в правилах. Звездочки над множимым в нашем примере показывают цифры, используемые в каждом шаге при решении примера. Приступим к решению примера.

Первое правило

Напишите последнюю цифру числа 633 в качестве правой цифры результата:

$$\frac{63\overset{*}{3} \times 11}{3}$$

Второе правило

Каждая последующая цифра числа 633 складывается со своим правым соседом и записывается в результат. 3 + 3, будет 6. Перед 3 записываем в результате 6:

$$\frac{6\overset{**}{33} \times 11}{63}$$

Применим правило еще раз:

6 + 3 будет 9. Записываем и эту цифру в результате:

$$\frac{\overset{**}{63}3 \times 11}{963}$$

Третье правило

Первая цифра числа 633, т. е. 6, становится левой цифрой результата:

$$\frac{\overset{*}{6}\ 3\ 3 \times 1\ 1}{6\ 9\ 6\ 3}$$

Ответ: 6963.

Большие числа обрабатываются таким же способом. Второе правило («каждая последующая цифра множимого складывается со своим правым соседом») в нашем примере применено дважды; при больших числах это правило может быть применено многократно.

Рассмотрим такой пример: 721 324 умножить на 11:

$$7\ 2\ 1\ 3\ 2\ 4 \times 11$$

Первое правило

Последняя цифра множимого 721 324 пишется в качестве правой цифры результата:

$$\frac{7\ 2\ 1\ 3\ 2\ \overset{*}{4} \times 1\ 1}{4}$$

Второе правило

Каждая последующая цифра числа 721 324 складывается со своим соседом справа и записывается в результат. Применим это правило пять раз:

$$\begin{array}{r} 7\,2\,1\,3\,\overset{*}{2}\,\overset{*}{4} \\ \hline 6\,4 \end{array} \times 1\,1$$

2 плюс 4, будет 6.

$$\begin{array}{r} 7\,2\,1\,\overset{*}{3}\,\overset{*}{2}\,4 \\ \hline 5\,6\,4 \end{array} \times 1\,1$$

3 плюс 2, будет 5.

$$\begin{array}{r} 7\,2\,\overset{*}{1}\,\overset{*}{3}\,2\,4 \\ \hline 4\,5\,6\,4 \end{array} \times 1\,1$$

1 плюс 3, будет 4.

$$\begin{array}{r} 7\,\overset{*}{2}\,\overset{*}{1}\,3\,2\,4 \\ \hline 3\,4\,5\,6\,4 \end{array} \times 1\,1$$

2 плюс 1, будет 3.

$$\begin{array}{r} \overset{*}{7}\,\overset{*}{2}\,1\,3\,2\,4 \\ \hline 9\,3\,4\,5\,6\,4 \end{array} \times 1\,1$$

7 плюс 2, будет 9.

Третье правило

Первая цифра числа 721 324 становится левой цифрой результата:

$$\begin{array}{r} \overset{*}{7}\,2\,1\,3\,2\,4 \\ \hline 7\,9\,3\,4\,5\,6\,4 \end{array} \times 1\,1$$

О т в е т: 7 934 564.

Как видите, каждая цифра данного числа использована дважды. Первый раз она использована как «цифра», а в следующем шаге как «сосед». В приведенном выше примере цифра 1 (во множимом) была «цифрой», когда она дала 4 в результате, но когда при следующем шаге она участвовала в образовании 3, она была «соседом»:

$$\begin{array}{r} 7\,2\,\overset{*}{1}\,\overset{*}{3}\,2\,4 \\ \hline 4 \end{array} \times 1\,1 \qquad \begin{array}{r} 7\,\overset{*}{2}\,\overset{*}{1}\,3\,2\,4 \\ \hline 3 \end{array} \times 1\,1$$

Мы можем вместо трех правил пользоваться только одним, а именно вторым — правилом «прибавьте соседа», если будем применять его следующим образом. Сначала мы должны перед данным числом написать нуль или по крайней мере представить себе, что там находится нуль. Затем мы применяем идею «прибавления соседа» поочередно к каждой цифре данного числа:

$\underline{0\ 6\ 3\ \dot{3}} \times 1\ 1$

3 *«Соседа» нет, следовательно, мы ничего не прибавляем.*

$\underline{0\ 6\ 3\ 3} \times 1\ 1$

9 6 3 *Как ранее.*

$\underline{\dot{0}\ \dot{6}\ 3\ 3} \times 1\ 1$

6 9 6 3 *Нуль плюс 6, будет 6.*

Этот пример показывает, для чего нам нужен нуль перед множимым. Он должен нам напоминать о том, что действие еще не закончено. Без нуля в начале числа мы могли бы забыть написать последнюю цифру и думать, что ответ равен только 963. Ответ длиннее данного числа на одну цифру, и нуль в начале указывает на это.

Попробуйте сами решить задачу: 441 362 × 11 (записав ее в надлежащей форме).

Если вы начнете с 2 и будете, двигаясь влево, каждый раз прибавлять «соседа», то получите правильный ответ:

4 854 982.

Иногда при сложении числа с его «соседом» в ответе получается число, состоящее из двух цифр, так, 5 и 8 дают 13. В этом случае вы пишете 3 и, как обычно, «переносите» 1. Однако, применяя метод Трахтенберга, вам никогда не придется переносить чисел, больших, чем 2. Это очень облегчает решение сложных задач. (При переносе единицы достаточно поставить точку, в тех редких случаях, когда переносится двойка, — две точки.)

$\underline{0\ 1\ 7\ 5\ 4} \times 1\ 1$

1 9 ˙2 9 4 *2—это 12 от сложения 7 и 5.*

Попробуйте сами решить следующую задачу:

$\underline{0\ 7\ 1\ 5\ 6\ 2\ 4} \times 11.$

В том случае, когда в длинном числе, начинающемся с цифры 9, следующая цифра также велика, скажем 8, как в числе 98 834, мы можем при последнем шаге получить 10. Например:

$\underline{9\ 8\ 8\ 3\ 4} \times 1\ 1$

1 0 ˙8 ˙7 ˙1 7 4

УМНОЖЕНИЕ НА ДВЕНАДЦАТЬ

Правило умножения на 12 заключается в следующем:

Нужно удваивать поочередно каждую цифру и прибавлять к ней ее «соседа».

В отличие от умножения на 11, теперь каждую цифру удваивают, прежде чем прибавлять к ней «соседа». Рассмотрим это на примере. Умножим 413 на 12.

Первый шаг.

$$\frac{0\,4\,1\,\overset{*}{3}}{6} \quad \times \quad 1\,2$$

Удваиваем самую правую цифру и под ней пишем ответ («соседа» нет).

Второй шаг.

$$\frac{0\,4\,\overset{*}{1}\,\overset{*}{3}}{5\,6} \quad \times \quad 1\,2$$

Удваиваем 1 и прибавляем 3.

Третий шаг.

$$\frac{0\,\overset{*}{4}\,\overset{*}{1}\,3}{9\,5\,6} \quad \times \quad 1\,2$$

Удваиваем 4 и прибавляем 1.

Последний шаг.

$$\frac{\overset{*}{0}\,\overset{*}{4}\,1\,3}{4\,9\,5\,6} \quad \times \quad 1\,2$$

Удвоенный нуль есть нуль, прибавляем 4.

Ответ: 4 956.

Проделав это самостоятельно, вы убедитесь, что действие производится очень быстро и легко.

Умножим 63 247 на 12. Напишите цифры множимого через интервал и каждую цифру результата пишите точно под той цифрой числа 63 247, из которой она образовалась. Такой порядок нужен не только ради красоты, он ценен тем, что гарантирует от ошибок. При данном методе умножения это особенно важно еще и потому, что так удобнее распознавать цифру и «соседа».

Свободное место для следующей цифры ответа находится прямо под цифрой (в этом примере — под цифрой, которая должна быть удвоена). Цифра рядом справа — «сосед», который должен быть прибавлен:

$$\frac{0\,6\,3\,2\,4\,\overset{*}{7}}{\dot{}4} \quad \times \quad 1\,2$$

Дважды 7, будет 14; переносим 1.

$$\frac{0\,6\,3\,2\,\overset{*}{4}\,\overset{*}{7}}{\dot{}6\,\dot{}4} \quad \times \quad 1\,2$$

Дважды 4 плюс 7 плюс 1, будет 16; переносим 1.

$$\frac{0\,6\,3\,\overset{*}{2}\,\overset{*}{4}\,7}{9\,\dot{}6\,\dot{}4} \quad \times \quad 1\,2$$

Дважды 2 плюс 4 плюс 1, будет 9.

Следующий шаг напишите сами.

Окончательно:

$$\begin{array}{l}\underline{0\;6\;3\;2\;4\;7}\quad\times\quad 1\;2\\ 7^{\cdot}5\;8\;9^{\cdot}6^{\cdot}4\end{array}$$

При умножении на 5,6 и 7 используется идея деления цифры «пополам». Мы берем слово «пополам» в кавычки, так как дроби, которые могут при этом встретиться, мы отбрасываем. Так, «половина» от 5 у нас 2. В действительности она равна $2^1/_2$, но дроби мы в расчет не берем. Так, «половина» от 3 равна 1, а «половина» от 1 равна нулю. Разумеется, половина от 4 равна 2. Этот шаг делается непосредственно. Мы не говорим про себя: «Половина от 4 будет 2»— или что-либо подобное. Мы смотрим на 4 и говорим «2». Попробуйте это проделать со следующими цифрами:

2, 6, 4, 5, 8, 7, 2, 9, 4, 3, 0, 7, 6, 8, 5, 9, 3, 6, 1.

Отличительная особенность нечетных цифр (1, 3, 5, 7 и 9) состоит в том, что при делении их «пополам» мы отбрасываем дроби. Четные цифры (0, 2, 4, 6 и 8) дают обычный результат.

УМНОЖЕНИЕ НА ШЕСТЬ

Рассмотрим подробнее умножение на 6. Приводим часть правил умножения на 6:

Прибавить к каждой цифре «половину» «соседа».

Допустим временно, что это все, что нам необходимо знать об умножении на 6, и решим следующую задачу:

$$\underline{0\;6\;2\;2\;0\;8\;4}\times 6$$

Первый шаг. 4 является правой цифрой данного числа, и, так как «соседа» у нее нет, прибавлять нечего:

$$\begin{array}{r}\underline{0\;6\;2\;2\;0\;8\;\overset{*}{4}}\quad\times\quad 6\\ 4\qquad\qquad\end{array}$$

Второй шаг. Вторая цифра 8, ее «сосед» 4.

Мы берем 8, прибавляем половину 4 (2) и получаем 10:

$$\begin{array}{r}\underline{0\;6\;2\;2\;0\;\overset{*}{8}\;\overset{*}{4}}\quad\times\quad 6\\ {}^{\cdot}0\;4\qquad\qquad\end{array}$$

Третий шаг. Следующая цифра нуль. Мы прибавляем к ней половину «соседа» — 8; 0 + 4, будет 4, плюс перенос (1):

$$\begin{array}{r}\underline{0\;6\;2\;2\;\overset{*}{0}\;\overset{*}{8}\;4}\quad\times\quad 6\\ 5^{\cdot}0\;4\qquad\qquad\end{array}$$

Остальные шаги проделайте сами. Окончательно:

$$\frac{0\;6\;2\;2\;0\;8\;4}{3\;7\;3\;2\;5\dot{}0\;4} \times 6$$

Проделайте теперь самостоятельно следующие примеры, и вы убедитесь, как это просто:

$$\underline{0\;4\;4\;0\;4} \times 6$$

$$\underline{0\;2\;8\;6\;8\;8\;4\;2\;4} \times 6$$

Ответ к первой задаче: 26 424, ко второй: 172 130 544.

Приведем теперь полное правило умножения на 6:

Прибавьте к каждой цифре половину «соседа» и еще 5 в том случае, если цифра нечетная.

Является ли «сосед» четным или нечетным — никакой роли не играет. Мы смотрим только на «цифру»: если она четная, прибавляем к ней половину «соседа», если нечетная, то, кроме «половины» «соседа», прибавляем еще 5. Например:

$$0\;4\;4\;3\;0\;5\;2 \times 6$$

Цифры 3 и 5 — нечетные. Поэтому, обрабатывая 3 и 5, мы дополнительно должны прибавить 5 только потому, что они нечетные. Это происходит следующим образом:

Первый шаг.

$$\frac{0\;4\;4\;3\;0\;5\;\overset{*}{2}}{2} \times 6$$

2—четная и не имеет «соседа»; напишем ее снизу.

Второй шаг.

$$\frac{0\;4\;4\;3\;0\;\overset{*}{5}\;\overset{*}{2}}{\dot{}1\;2} \times 6$$

5—нечетная; 5 плюс 5 плюс половина от 2, будет 11.

Третий шаг.

$$\frac{0\;4\;4\;3\;\overset{*}{0}\;\overset{*}{5}\;2}{3\dot{}1\;2} \times 6$$

«Половина» от 5, будет 2; затем прибавим перенос.

Четвертый шаг.

$$\frac{0\;4\;4\;\overset{*}{3}\;\overset{*}{0}\;5\;2}{8\;3\dot{}1\;2} \times 6$$

3—нечетная; 3 плюс 5, будет 8.

Пятый шаг.

$$\frac{0\,4\,\dot{4}\,\dot{3}\,0\,5\,2}{5\,8\,3^{\cdot}1\,2} \times 6$$

4 плюс «половина» от 3.

Шестой шаг.

$$\frac{0\,\dot{4}\,\dot{4}\,3\,0\,5\,2}{6\,5\,8\,3^{\cdot}1\,2} \times 6$$

4 плюс половина от 4.

Последний шаг.

$$\frac{0\,4\,4\,3\,0\,5\,2}{2\,6\,5\,8\,3^{\cdot}1\,2} \times 6$$

Нуль плюс половина от 4.

Ответ: 2 658 312.

Разумеется, все эти объяснения приводятся здесь только для большей ясности, поскольку метод излагается впервые. При практическом применении метода это делается быстро, так как шаг прибавления «соседа» очень прост. Достаточно нескольких упражнений, и он выполняется автоматически, без всяких предварительных рассуждений.

Более ясно вы это увидите, когда самостоятельно решите следующие две задачи:

$$\underline{0\,8\,2\,3\,4} \times 6$$

$$\underline{0\,6\,2\,5\,0\,1\,8\,8} \times 6$$

Ответ к первой задаче: 49 404, ко второй: 37 501 128.

Числа, которые мы умножали на 6, были длинными. А будет ли работать метод, если мы попытаемся умножать на шесть однозначные числа, например 6 на 6? Да, и даже не потребуется никаких изменений. Попробуем умножить 8 на 6, применив тот же способ:

$$\frac{0\,8}{8} \times 6$$

«Соседа» нет; пишем просто 8.

$$\frac{0\,8}{4\,8} \times 6$$

Нуль плюс половина от 8, будет 4.

Когда множимое нечетное, например 7, то при первом шаге мы должны прибавить 5. Разумеется, мы ее не прибавляем при втором шаге, так как нуль мы рассматриваем как четное число:

$$\frac{0\,7}{^{\cdot}2} \times 6$$

7 плюс 5, будет 12.

$$\frac{0\,7}{4\,^{\cdot}2} \times 6$$

Нуль плюс «половина» от 7 плюс перенесенная 1.

Большинство людей, по-видимому, считают, что знают наизусть таблицу умножения на 6. Во всяком случае, математики обычно искренне в этом уверены, хотя и не всегда имеют на то основание. Использованные в данном методе умножения приемы будут нами в дальнейшем применены в более сложных ситуациях без всяких выучиваемых наизусть таблиц. Но демонстрировать новые способы лучше всего на относительно знакомом материале. Что мы сейчас и делаем.

Таким же образом (и это важнее, чем может казаться) постепенно прививаются необходимые для вычислений умственные навыки. Все мы слышали о критике манеры чтения у малокультурных людей, слышали также о клиниках, в которых развивают способность к быстрому чтению. Критики утверждают, что слишком многие люди имеют привычку читать букву за буквой, складывая по слогам все, что они читают. Нам рекомендуется совершенствовать наши навыки в чтении, воспринимая сразу, целиком слово или фразу. Указывается и на другие моменты. Все они сводятся к следующему: большинство людей настолько плохо читают, насколько неудовлетворительны их навыки в чтении.

В какой-то степени это справедливо и для арифметики. Тот, кто подвержен этим скверным привычкам в арифметике, в результате попусту расточает свое время и энергию. Только те, кто большую часть своего времени имеет дело с числами, например бухгалтеры, сами вырабатывают удобные для себя приемы. Но и остальные люди, не занимающиеся вычислениями заработка ради, могут при известном напряжении и небольшой тренировке овладеть полезными приемами счета. Некоторые из них приводятся в данной и следующих главах.

Один из таких мысленных приемов, кстати очень простой, как раз и был упомянут, когда мы говорили о «половине соседа». Необходимо натренировать себя до такой степени, чтобы при взгляде на отдельную цифру, скажем 2 или 8, тут же говорить «1» или «4», не делая в уме никаких промежуточных шагов. Как только мы видим 2 или 8, ответ должен возникнуть в уме немедленно, как бы в результате рефлекса. Мы настоятельно рекомендуем читателю повторить соответствующие упражнения.

Следующий шаг состоит в том, чтобы при прибавлении соседа или половины соседа (мы уже привыкли к этим условным терминам, поэтому позволим себе писать их без кавычек) говорить про себя только ответ, как в этом примере:

374200

$$\begin{array}{r} 0\,2\,\dot{6}\,\dot{4} \times 6 \\ \hline 8\,4 \end{array}$$

8 — это 6 + половина от 4. Но не говорите: «Половина от 4 — это 2 и 6 + 2 — это 8». Вместо этого посмотрите на 6 и 4, заметьте, что половина 4 равна 2, и скажите про себя: «6, 8». Вначале это

будет трудновато, поэтому, пожалуй, лучше сказать про себя «6, 2, 8».

Еще один пункт, требующий упражнения, — это шаг с прибавлением 5, когда цифра (а не сосед!) нечетная. Возьмите такой случай:

$$\begin{array}{l} 0\ 6\ \overset{*}{3}\ \overset{*}{4} \quad \times \quad 6 \\ \hline \quad {}^{\cdot}0\ 4 \end{array}$$

Как указывает точка, нуль является нулем от 10, а 10 — это 3 плюс 5 (так как 3 нечетно) плюс 2 (половина от 4). Для начала правильное действие состоит в том, чтобы сказать «3, 5, 2, 10». Прежде всего надо прибавить 5, которая появляется потому, что 3 нечетно, иначе мы можем забыть это сделать. Так же следует поступать, когда вместо перенесенной единицы стоит точка, которую надо «прибавить» перед тем, как мы прибавляем соседа (при умножении на 11) или половину соседа (при умножении на 6). Если же мы будем пытаться не трогать перенесенную единицу до того, как мы прибавили соседа, мы ее иногда будем забывать. В приведенной выше задаче очередную цифру ответа мы находим следующим образом:

$$\begin{array}{l} 0\ \overset{*}{6}\ \overset{*}{3}\ 4 \quad \times \quad 6 \\ \hline \quad 8\ {}^{\cdot}0\ 4 \end{array}$$

«Прибавляя» точку, мы смотрим на 6 и говорим «7», затем мы говорим «8», прибавляя половину от 3. Для начала, «прибавляя» точку, лучше посмотреть на 6 и сказать «7», затем сказать «1» для половины от 3, затем «8», написать 8. Когда надо «прибавить» точку и 5 (так как цифра нечетная), вы говорите «6» вместо «5» и прибавляете саму цифру. Это экономит шаг и легко может быть проделано. Возьмите карандаш и при решении следующих задач ограничьтесь лишь самыми необходимыми шагами.

Умножьте на 11 (прибавьте соседа):

1) 0 4 2 3 2; 2) 0 4 7 4 9 2.

Умножьте на 12 (удвойте и прибавьте соседа):

3) 0 4 2 3 2; 4) 0 4 7 4 9 2.

Умножьте на 6 (прибавьте 5, если цифра нечетная, и прибавьте половину соседа):

5) 0 2 2 2 2;	9) 0 2 9 0 6;
6) 0 2 0 0 4;	10) 0 5 2 4 4;
7) 0 4 2 3 2;	11) 0 3 8 6 5;
8) 0 4 7 4 8;	12) 0 4 1 1 1.

Ответы:

1) 4 6 5 5 2;
2) 5 5 2 4 1 2;
3) 5 0 7 8 4;
4) 5 6 9 9 0 4;
5) 1 3 3 3 2;
6) 1 2 0 2 4;
7) 2 5 3 9 2;
8) 2 8 4 8 8;
9) 1 7 4 3 6;
10) 3 1 4 6 4;
11) 2 3 1 9 0;
12) 2 4 6 6 0.

УМНОЖЕНИЕ НА СЕМЬ

Правило умножения на 7 очень похоже на правило умножения на 6:

Удвойте цифру и прибавьте половину соседа. Если цифра нечетная, прибавьте еще 5.

Предположим, что мы хотим умножить 4242 на 7.

Так как в этом числе нет нечетных цифр, то нам нет никакой необходимости дополнительно прибавлять 5. В этом примере мы действуем так же, как и при умножении на 6, если не считать того, что теперь мы удваиваем цифру:

Первый шаг.

$$\begin{array}{rl} \underline{0\;4\;2\;4\;\overset{*}{2}} & \times\;7 \\ 4 & \end{array}$$

Дважды 2.

Второй шаг.

$$\begin{array}{rl} \underline{0\;4\;2\;\overset{*}{4}\;\overset{*}{2}} & \times\;7 \\ 9\;4 & \end{array}$$

Дважды 4 плюс половина соседа.

Третий шаг.

$$\begin{array}{rl} \underline{0\;4\;\overset{*}{2}\;\overset{*}{4}\;2} & \times\;7 \\ 6\;9\;4 & \end{array}$$

Дважды 2 плюс половина соседа.

Четвертый шаг.

$$\begin{array}{rl} \underline{0\;\overset{*}{4}\;\overset{*}{2}\;4\;2} & \times\;7 \\ 9\;6\;9\;4 & \end{array}$$

Последний шаг.

$$\begin{array}{rl} \underline{\overset{*}{0}\;\overset{*}{4}\;2\;4\;2} & \times\;7 \\ 2\;9\;6\;9\;4 & \end{array}$$

Дважды нуль—нуль, но еще прибавляется половина соседа.

А вот пример с нечетными цифрами:

Первый шаг.

$$\begin{array}{rl} \underline{0\;3\;4\;1\;\overset{*}{2}} & \times\;7 \\ 4 & \end{array}$$

Дважды 2; соседа нет.

Второй шаг.

$$\begin{array}{r} 034\overset{*}{1}\overset{*}{2} \times 7 \\ \hline 84 \end{array}$$

Дважды 1 плюс 5 (1—нечетная), будет 7, и плюс половина от 2.

Третий шаг.

$$\begin{array}{r} 03\overset{*}{4}\overset{*}{1}2 \times 7 \\ \hline 884 \end{array}$$

Четная: дважды 4 плюс половина от 1.

Четвертый шаг.

$$\begin{array}{r} 0\overset{*}{3}\overset{*}{4}12 \times 7 \\ \hline \dot{}3884 \end{array}$$

Дважды 3 плюс 5 (3—нечетная) плюс половина от 4, будет 13.

Последний шаг.

$$\begin{array}{r} 03412 \times 7 \\ \hline 2\dot{}3884 \end{array}$$

Дважды 0 будет 0, но надо прибавить еще половину от 3 и оставшуюся единицу.

Вот перечень рекомендуемых мысленных шагов:

1. Скажите «1» вместо точки, когда переносится единица.

2. Смотрите на следующую цифру и установите, нечетная ли она.

Если да, то прибавьте 5 к перенесенной единице и скажите «6», или скажите «5», если точки не было.

3. Когда мы смотрим на цифру и удваиваем ее в уме, мы говорим сумму 5 и этой удвоенной цифры. Если, например, эта цифра 3, то мы говорим «5», а затем «11», так как удвоение 3, дающее 6, и прибавление 5 могут быть проделаны одним шагом.

4. Когда мы смотрим на соседа, например 6, мы половину от 6 прибавляем к тому, что уже имеем. Мы только что сказали, что у нас «11». Если сосед 6, мы затем говорим «14».

Разрешите на этом процессе немного задержаться. Упражнение, с которым связано решение такого рода задач, очень ценно, ибо оно развивает способность сосредоточиваться, а в умении сосредоточиться практически весь секрет успеха. Эта способность не может быть достигнута сразу, но мы можем облегчить себе задачу тем, что некоторые отдельные ступени последовательно пройдем следующим образом:

Во-первых, посмотрите на каждую из следующих цифр, удвойте ее и громко сразу же, без всяких промежуточных шагов, назовите полученное число. (Когда смотрите на 3, говорите тотчас же «6», не произнося «3».)

2, 4, 1, 6, 0, 3, 5, 1, 4, 3, 8, 2, 6, 3,
7, 5, 9, 2, 1, 0, 6, 3, 5, 2, 6, 8, 7, 4.

В о-в т о р ы х, посмотрите на каждую левую цифру из каждой следующей пары чисел, произнесите вслух ее удвоенное значение (так, посмотрите на 3 и скажите «6»), затем прибавьте ее соседа (у пары 34 скажите «6, 10»). Это и есть быстрый путь умножения на 12

21	34	20	11	22	02
27	15	60	71	45	09
32	38	74	52	82	41

В-т р е т ь и х, в каждой следующей паре чисел смотрите на левую цифру, назовите громко ее удвоенное значение и прибавьте половину соседа (так, посмотрите на 26 и скажите «4, 7»). Это умножение на семь при четных цифрах:

26	27	40	61	26	44
04	22	29	81	88	89
66	43	67	49	81	07

В-ч е т в е р т ы х, всмотритесь в каждое из следующих чисел и скажите «5», затем «5 плюс удовоенное число» (смотря на 3, говорите «5, «11»):

7, 5, 3, 1, 9, 3, 7, 5, 1.

Проделайте все эти примеры еще раз!

В-п я т ы х, в каждой следующей паре чисел смотрите на левое число, скажите «5», затем скажите результат от 5 плюс удвоенное число, как мы это только что делали, прибавьте сразу же половину соседа и скажите результат (для пары 3 4 скажите «5, 11, 13»). Это умножение на семь при нечетных цифрах:

1 0 1 2 1 6 1 8

О т в е т ы: 7, 8, 10, 11.

3 0 3 2 3 8 3 4
5 0 5 6 7 0 7 2

Посмотрите теперь, как быстро вы можете умножать на 7. Попробуйте сначала умножать такие числа, у которых все цифры четные, что бы не было необходимости прибавлять 5. Вы только каждый раз удваиваете цифру и прибавляете половину соседа:

0 2 0 2 0 2 2 2 0 6 0 2
0 4 4 4 0 6 4 2 0 8 4 6

Мы заканчиваем данный раздел рассмотрением чисел, которые содержат некоторые нечетные цифры, требующие прибавления 5:

0 2 2 3 0 3 0 2 0 2 5 4

0 2 7 4 0 6 1 8 0 1 3 4

О т в е т ы: 1 561, 2 114, 1 778.

УМНОЖЕНИЕ НА ПЯТЬ

Правило умножения на 5 подобно правилу умножения на 6 и 7, только оно проще. Вместо того чтобы прибавлять цифру, как мы это делали при умножении на 6, или удваивать ее, как при умножении на 7, мы используем цифру только для того, чтобы определить ее четность или нечетность.

Если цифра нечетная, берем половину соседа и прибавляем 5. Если цифра четная, пишем половину соседа.

Предположим, мы хотим 426 умножить на 5:

$$\begin{array}{r} 0\;4\;2\;\overset{*}{6} \\ \hline 0 \end{array} \times 5$$

Смотрим на цифру 6, она четная; 5 не прибавляется (соседа нет).

$$\begin{array}{r} 0\;4\;\overset{*}{2}\;\overset{*}{6} \\ \hline 3\;0 \end{array} \times 5$$

Смотрим на цифру 2, она четная; пишем половину от 6.

$$\begin{array}{r} 0\;\overset{*}{4}\;\overset{*}{2}\;6 \\ \hline 1\;3\;0 \end{array} \times 5$$

Смотрим на цифру 4, она четная; пишем половину от 2.

$$\begin{array}{r} \overset{*}{0}\;\overset{*}{4}\;2\;6 \\ \hline 2\;1\;3\;0 \end{array} \times 5$$

Смотрим на 0, цифра четная; возьмем половину от 4.

Если бы мы имели во множимом нечетную цифру, мы бы прибавляли 5:

$$\begin{array}{r} 0\;4\;3\;\overset{*}{6} \\ \hline 0 \end{array} \times 5$$

Как выше.

$$\begin{array}{r} 0\;4\;\overset{*}{3}\;\overset{*}{6} \\ \hline 8\;0 \end{array} \times 5$$

3—нечетная; 5 плюс половина соседа (3), т. е. 8.

$$\begin{array}{r} \overset{*}{0}\;\overset{*}{4}\;3\;6 \\ \hline 2\;1\;8\;0 \end{array} \times 5$$

Все это легко выполнимо. Вычислений тут очень мало.

Сначала эти действия покажутся вам немного странными, поскольку приходится несколько перестроить ход своих мыслей. Так, вы больше используете соседа, чем цифру. Очень полезно поупражняться в умении удерживать в поле зрения определенное место числа. Позже, когда мы будем умножать одно большое число на другое, мы убедимся, что требуется известное умение сосредоточиваться, чтобы вспомнить, в какой стадии умножения мы находимся. Данный метод умножения на 5 является некоторым предварительным упражнением.

Попробуйте по описанному выше методу умножить следующие числа на 5:

1) 0 4 4 4;	4) 0 4 3 4;	6) 0 2 5 6 4 1 3;
2) 0 4 2 8;	5) 0 6 4 7;	7) 0 1 4 2 8 5 7.
3) 0 4 2 4 8 8 2;		

Ответы:

1) 2 2 2 0;	4) 2 1 7 0;	6) 1 2 8 2 0 6 5;
2) 2 1 4 0;	5) 3 2 3 5;	7) 7 1 4 2 8 5.
3) 2 1 2 4 4 1 0;		

УМНОЖЕНИЕ НА ДЕВЯТЬ

При умножении на 8 и 9 мы мысленно делаем еще один новый шаг, который требует дальнейших упражнений. Раньше мы только складывали цифры, теперь нам нужно будет вычитать цифру из 9 или 10. Предположим, мы хотим 4567 умножить на 8 или 9. В обоих этих случаях первый шаг состоит в том, чтобы последнюю цифру большого числа (7) вычесть из 10. Мы начинаем с того, что смотрим на правый край числа 4 567и говорим «3». Надо предварительно говорить: «10 минус 7, будет 3», реакция должна быть немедленная. Мы смотрим на 7 и говорим «3». Проверьте быстроту вашей реакции — посмотрите на каждую из следующих цифр и тотчас же скажите получаемый результат после вычета ее из 10:

7, 6, 9, 2, 8, 1, 7, 4, 2, 3, 9, 6, 5, 3, 1, 9.

Иногда нам придется вычитать цифру не из 10, а из 9. Мы смотрим, например, на цифру 7 и тут же говорим «2». Попробуйте как можно быстрее проделать это со следующими цифрами:

7, 8 , 2, 4, 9, 5, 1, 7, 2, 0, 3, 8, 6, 5, 1, 0.

Теперь вы сможете легко и быстро умножать на 9, не пользуясь таблицей умножения. Лучше всего это пояснит правило, которое нет необходимости выучивать наизусть, ибо после некоторой тренировки оно само закрепится в вашей памяти. Правило это гласит:

1. *Вычтите правую цифру большого числа из 10. Это дает правую цифру результата.*

2. *Возьмите поочередно каждую из следующих цифр до самой последней, вычтите ее из 9 и прибавьте соседа.*

3. *В последнем шаге, когда вы будете рассматривать цифру нуль, стоящую перед длинным числом, вычтите 1 из соседа, и полученное число будет самой левой цифрой результата.*

Если имеется точка (перенесенная 1), то, разумеется, при всех этих шагах вы, как обычно, должны ее прибавить.

Рассмотрим пример: 8769 умножить на 9:

$$\frac{0\;8\;7\;6\;9}{7\;8\;9\;\dot{2}\;1} \times 9$$

Во-первых, вычитаем 9 из 10, получаем 1.

Во-вторых, вычитаем 6 из 9 (получаем 3) и прибавляем соседа (9).

Результат — 12, поэтому мы пишем точку и 2.

В-третьих, 7 вычитаем из 9 (получаем 2), плюс сосед (6), будет 8 и «плюс точка», будет 9.

В-четвертых, 8 вычитаем из 9, будет 1, плюс сосед, будет 8.

В-пятых, это последний шаг; мы рассматриваем самую левую цифру — нуль, поэтому мы уменьшаем самую левую цифру от числа 8769 на 1, и 7 становится самой левой цифрой результата.

Попробуйте сами умножить 8888 на 9:

$$08888 \times 9$$

Самой правой цифрой результата будет 2, так как, вычитая 8 из 10, мы получим 2. В данном случае нет точек, нет переноса, и самой левой цифрой результата будет 7 (т. е. самая левая цифра —8 минус 1).

Ответ: 799 992.

Решите следующие задачи, записанные здесь в порядке нарастания трудности:

1) 0 3 3; 3) 0 8 6 7 3 3; 5) 0 8 0 5;
2) 0 9 8 6 5 4; 4) 0 6 2 6; 6) 0 7 7 5 4 9 6 5.

Ответы: 1) 297; 3) 780 597; 5) 7 245;
2) 887 886; 4) 5 634; 6) 69 794 685.

УМНОЖЕНИЕ НА ВОСЕМЬ

Правила умножения на 8 таковы:

1. *Первая цифра: вычтите из 10 и удвойте.*

2. *Средние цифры: вычтите из 9 и удвойте полученное, затем прибавьте соседа.*

3. *Левая цифра: вычтите 2 из самой левой цифры большого числа.*

Умножение на 8 аналогично умножению на 9, с той лишь разницей, что происходит удвоение разностей и в последнем шаге из левой цифры большого числа вычитается не 1, а 2. Рассмотрим пример: 789 × 8:

$$\frac{0\ 7\ 8\ \overset{*}{9}}{2} \times 8$$

Написанная в результате цифра 2 получается после вычитания 9 из 10 и удвоения результата. Следующая цифра числа 789 является одной из «средних цифр», поэтому мы ее вычитаем из 9, удваиваем результат и прибавляем соседа:

$$\begin{array}{l} 0\ 7\ \overset{*}{8}\ \overset{*}{9} \times 8 \\ \hline \quad\ \cdot1\ 2 \end{array}$$

7 также считается «средней цифрой», мы получим окончательное решение лишь тогда, когда достигнем нуля перед числом 789. Поэтому у 7 мы удваиваем 2 (из 9 вычесть 7, будет 2), и полученную цифру 4 прибавляем к 8:

$$\begin{array}{l} 0\ \overset{*}{7}\ \overset{*}{8}\ 9 \times 8 \\ \hline \quad \cdot3\ \cdot1\ 2 \end{array}$$

Наконец, крайняя левая цифра 7 уменьшается на 2, это дает 5, и мы прибавляем перенесенную единицу:

$$\begin{array}{l} \overset{*}{0}\ \overset{*}{7}\ 8\ 9 \times 8 \\ \hline 6\ \cdot3\ \cdot1\ 2 \end{array}$$

Обратите внимание, насколько этот метод, после того как вы его как следует усвоили, проще и легче обычного умножения. При обычном методе мы должны не только твердо знать таблицу умножения (а многие люди неуверенно умножают 8 × 7, 8 × 8 и 8 × 9), но еще и вынуждены переносить 7, а затем снова 7. Все это может привести к ошибкам. В методе Трахтенберга при умножении не требуется переносить больше единицы.

Само собой разумеется, что лишь тогда владеешь методом, когда умеешь пользоваться им, не думая ни о каких «правилах». Чтобы добиться этого, необходимо выработать автоматизм в применении метода, который достигается после некоторой тренировки.

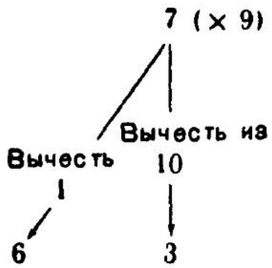
Попробуйте для упражнения умножить на 8 каждое из следующих чисел:

0 7 3 (ответ: 584)	0 4 9 (ответ: 392)
0 6 9	0 9 8
0 7 7 7 7	0 8 5 8 6
0 6 2 8 8	0 3 6 6 9

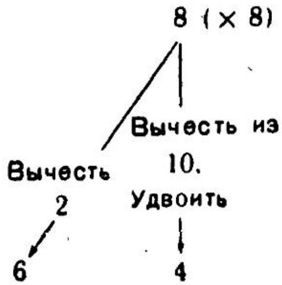
Конечно, эти правила применимы и к однозначным числам. Предположим, мы хотим умножить 7 на 9. Нет «средних цифр». Поэтому мы, как при обычном первом шаге, 7 вычитаем из 10 и затем, как при последнем шаге, вычитаем 1 из 7. Это выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{l} 0\ 7 \times 9 \\ \hline 6\ 3 \end{array}$$

Умножение однозначных чисел на 9 происходит по следующей простой схеме:



Аналогичную схему можно составить и для умножения на 8:



Если бы мы таким способом стали умножать на 8 малые цифры (от 1 до 5), нам пришлось бы переносить единицу. Но обычно в этом нет необходимости, так как мы все хорошо знаем таблицу умножения малых чисел. Люди, по-видимому, испытывают некоторые затруднения только при перемножении больших цифр (7 × 8).

Каждый, кому трудно дается таблица умножения, чтобы укрепить свою память, может пользоваться этими диаграммами.

УМНОЖЕНИЕ НА ЧЕТЫРЕ

Большинство людей, обладающих даже самыми скромными математическими знаниями, совершенно уверены в том, что умеют умножать на 4. Но мы все-таки сейчас покажем, как это делается при помощи способа, аналогичного тем, которые мы рассматривали выше.

Полностью правила таковы:

1. *Вычтите самую правую цифру данного числа из 10 и прибавьте 5, если цифра нечетная.*

2. *Вычтите поочередно каждую цифру данного числа из 9, прибавьте 5, если цифра нечетная, и прибавьте половину соседа.*

3. *Напишите под нулем перед заданным числом половину соседа этого нуля минус 1.*

Пример 1. 20 684 умножить на 4.

П е р в ы й ш а г. Цифру 4 числа 20 680 вычтите из 10:

$$\begin{array}{r} 0\;2\;0\;6\;8\;\overset{*}{4} \times 4 \\ \hline 6 \end{array}$$

В т о р о й ш а г.

$$\begin{array}{r} 0\;2\;0\;6\;\overset{*}{8}\;\overset{*}{4} \times 4 \\ \hline 3\;6 \end{array}$$

3 — это 9 минус 8 плюс половина от 4.

Т р е т и й ш а г.

$$\begin{array}{r} 0\;2\;0\;\overset{*}{6}\;\overset{*}{8}\;4 \times 4 \\ \hline 7\;3\;6 \end{array}$$

7 — это 9 минус 6 плюс половина от 8.

Ч е т в е р т ы й ш а г.

$$\begin{array}{r} 0\;2\;\overset{*}{0}\;\overset{*}{6}\;8\;4 \times 4 \\ \hline \cdot 2\;7\;3\;6 \end{array}$$

2 — это 9 минус нуль плюс половина от 6.

П я т ы й ш а г.

$$\begin{array}{r} 0\;\overset{*}{2}\;\overset{*}{0}\;6\;8\;4 \times 4 \\ \hline 8\cdot\;2\;7\;3\;6 \end{array}$$

8 — это 9 минус 2 плюс точка.

П о с л е д н и й ш а г.

$$\begin{array}{r} \overset{*}{0}\;\overset{*}{2}\;0\;6\;8\;4 \times 4 \\ \hline 0\;8\cdot\;2\;7\;3\;6 \end{array}$$

Нуль — это половина от 2 минус 1.

П р и м е р 2. В примере 1 не было необходимости прибавлять дополнительно 5, так как все цифры числа 20 684 четные. Вот пример, в котором некоторые цифры нечетные. Умножить 365 187 на 4.

П е р в ы й ш а г.

$$\begin{array}{r} 0\;3\;6\;5\;1\;8\;\overset{*}{7} \times 4 \\ \hline 8 \end{array}$$

От 10 отнять 7, будет 3, прибавим затем 5, так как 7 нечетно.

В т о р о й ш а г.

$$\begin{array}{r} 0\;3\;6\;5\;1\;\overset{*}{8}\;\overset{*}{7} \times 4 \\ \hline 4\;8 \end{array}$$

От 9 отнять 8 плюс половина от 7.

Т р е т и й ш а г.

$$\begin{array}{r} 0\;3\;6\;5\;\overset{*}{1}\;\overset{*}{8}\;7 \times 4 \\ \hline \cdot 7\;4\;8 \end{array}$$

·7 — это 9 минус 1 плюс 5 плюс половина от 8.

Четвертый, пятый и шестой шаги. Мы повторяем второе правило. Помните о том, что цифры 3 и 5 нечетные и требуют прибавления 5:

$$\begin{array}{l} \underline{0\ 3\ 6\ 5\ 1\ 8\ 7}\ \times 4 \\ \quad 4\ {}^{\cdot}6\ {}^{\cdot}0\ {}^{\cdot}7\ 4\ 8 \end{array}$$

Последний шаг.

$$\begin{array}{l} \underline{\overset{*}{0}\ \overset{*}{3}\ 6\ 5\ 1\ 8\ 7}\ \times 4 \\ 1\ {}^{\cdot}4\ {}^{\cdot}6\ {}^{\cdot}0\ {}^{\cdot}7\ 4\ 8 \end{array}$$

1 — это «половина» от 3 минус 1 «плюс точка».

Для закрепления правил проделайте следующие упражнения:

1) $\underline{0\ 2\ 6\ 8\ 8} \times 4$; 3) $\underline{0\ 2\ 4\ 7\ 8\ 4\ 7} \times 4$;

2) $\underline{0\ 8\ 6\ 0\ 4\ 4\ 2} \times 4$; 4) $\underline{0\ 5\ 4\ 6\ 1\ 8} \times 4$.

Ответы: 1) 10 752; 2) 3 441 768; 3) 991 388; 4) 218 472.

Для закрепления этих правил требуется куда меньше упражнений, чем при изучении таблицы умножения. Спустя несколько часов все операции кажутся естественными и простыми.

УМНОЖЕНИЕ НА ТРИ

Умножение на 3, за некоторыми исключениями, похоже на умножение на 8. Вместо того чтобы прибавлять соседа, как при умножении на 8, мы теперь прибавляем только половину соседа. Само собой разумеется, когда цифра нечетная, то мы дополнительно прибавляем еще и 5.

Правила умножения на 3 выглядят следующим образом:

1. *Первая цифра: вычтите ее из 10 и удвойте. Если цифра нечетная, прибавьте 5.*

2. *Средние цифры: вычтите цифру из 9 и полученное удвойте, затем прибавьте половину соседа и 5, если цифра нечетная.*

3. *Самая левая цифра: разделите на 2 самую левую цифру большого числа и вычтите 2.*

Умножим 2588 на 3.

Первый шаг.

$$\begin{array}{r} \underline{0\ 2\ 5\ 8\ \overset{*}{8}}\ \quad \times\ 3 \\ 4 \qquad\qquad \end{array}$$

4 — это 10 минус 8, удваиваем; соседа нет.

Второй шаг.

$$\begin{array}{r} \underline{0\ 2\ 5\ \overset{*}{8}\ \overset{*}{8}}\ \quad \times\ 3 \\ 6\ 4 \qquad\qquad \end{array}$$

6 — это 9 минус 8, удваиваем (получаем 2), плюс половина от 8.

Третий шаг.

$$\begin{array}{r} 0\,2\,\dot{5}\,\dot{8}\,8 \\ \hline \cdot 7\,6\,4 \end{array} \times 3$$

9 минус 5, удваиваем, плюс 5, плюс половина от 8.

Четвертый шаг.

$$\begin{array}{r} 0\,\dot{2}\,\dot{5}\,8\,8 \\ \hline \cdot 7\,\cdot 7\,6\,4 \end{array} \times 3$$

Последний шаг.

$$\begin{array}{r} \dot{0}\,\dot{2}\,5\,8\,8 \\ \hline 0\,\cdot 7\,\cdot 7\,6\,4 \end{array} \times 3$$

Нуль — это половина от 2 «плюс точка» минус 2.

В последнем шаге мы, как всегда, получаем самую левую цифру ответа из самой левой цифры данного числа. При умножении на 8 мы эту последнюю цифру ответа получали, уменьшив самую левую цифру данного числа на 2. Сейчас, при умножении на 3, мы уменьшаем половину этой цифры на 2.

УМНОЖЕНИЕ НА ДВА

Умножение на 2, разумеется, очень просто. По принятой нами терминологии это означает, что мы поочередно удваиваем каждую цифру данного числа, не пользуясь соседом. Мы можем удвоить число, просто прибавив его к самому себе, тогда даже не потребуется выучивать наизусть столбец таблицы умножения на 2.

УМНОЖЕНИЕ НА ОДИН

Умножение на 1 числа не изменяет. Любые числа любой величины при умножении их на 1 остаются неизменными. Поэтому «правило» звучит так:

Перепишите поочередно все цифры данного числа.

Последние несколько правил для умножения на малые цифры включены сюда главным образом ради полноты описания метода.

Все же важно заметить, что во всех случаях умножения на любые цифры число действительно необходимых операций невелико и все они очень просты. Вычитание из 9, удваивание, образование «половины» и прибавление «соседа» — вот единственные операции, с которыми приходится иметь дело. Если час-другой поупражняться, то все они будут казаться естественными, простыми и будут выполняться автоматически.

Поэтому профессор Трахтенберг считал, что методы, изложенные в настоящей главе, особенно полезны детям. Они с легкостью сможут пользоваться этими методами задолго до того, как будут в состоянии учить наизусть таблицу умножения. Разумеется, это научит их производить умножения с числами любой величины. Каждое умножение на одну цифру по вышеизложенным правилам является частью общепринятой схемы, и общий итог выводится, как обычно, путем сложения отдельных рядов. Вот простой пример:

37654 × 498	
301232	*Используем правило умножения 37 654 на 8.*
338886	*Используем правило умножения на 9.*
150516	*Используем правило умножения на 4.*
18751692	*Результат получаем, сложив столбцы.*

Так, любой ребенок, только освоивший простые сложения и вычитания, может почти сразу приступить к умножению больших чисел.

Сводка правил

Умножение на	Характер действия
11	Прибавьте соседа.
12	Удвойте цифру и прибавьте соседа.
6	Прибавьте 5 к цифре, если она нечетная, ничего не прибавляйте, если она четная. Прибавьте половину соседа (дроби отбрасываются).
7	Удвойте цифру, прибавьте 5, если она нечетная, и половину соседа.
5	Используйте половину соседа плюс 5, если цифра нечетная.
9	Первый шаг: вычтите из 10. Средние шаги: вычтите из 9 и прибавьте соседа. Последний шаг: уменьшите самую левую цифру множимого на 1.
8	Первый шаг: вычтите из 10 и удвойте. Средние шаги: вычтите из 9, удвойте и прибавьте соседа. Последний шаг: уменьшите самую левую цифру на 2.
4	Первый шаг: вычтите из 10 и прибавьте 5, если цифра нечетная. Средние шаги: вычтите из 9, прибавьте половину соседа и 5, если цифра нечетная. Последний шаг: возьмите половину самой левой цифры множимого и уменьшите ее на 1.
3	Первый шаг: вычтите из 10, удвойте и прибавьте 5, если цифра нечетная. Средние шаги: вычтите из 9, удвойте, прибавьте 5, если цифра нечетная, и прибавьте половину соседа. Последний шаг: возьмите половину самой левой цифры множимого и уменьшите ее на 2.
2	Удвойте каждую цифру множимого, не пользуясь соседом.
1	Перепишите множимое без изменений.
0	Нуль, умноженный на любое число, дает нуль.

Глава вторая

БЫСТРОЕ УМНОЖЕНИЕ ПРЯМЫМ МЕТОДОМ

В первой главе мы видели, как можно применить основные приемы умножения не пользуясь таблицей умножения. С помощью нового способа мы сумели освежить в памяти наше знание таблицы умножения. Теперь мы всегда, когда найдем нужным, сможем пользоваться ею с большей уверенностью, быстро и надежно.

Новый подход к умножению приучил нас пользоваться парой цифр множимого для получения каждой цифры ответа. Вспомните, что «цифра» стоит непосредственно над свободным местом, на котором появится очередная цифра результата. «Сосед» — это цифра множимого, находящаяся непосредственно справа от «цифры». Такие пары цифра — сосед будут снова использованы в этой главе, но теперь уже немного по-другому.

Мы уже подготовлены к тому, чтобы сделать очередной шаг в изучении метода, направленный к сокращению процесса умножения. Мы будем учиться умножать одни числа на другие числа независимо от их длины и сразу же получать ответ без промежуточных действий. Например, сокращенная форма умножения 625 на 346 будет выглядеть так:

$$\frac{0\;0\;0\;6\;2\;5}{2\;1\;6\;2\;5\;0} \times 346$$

Познакомимся с тем, как по этой форме производится умножение. Ничего другого записывать нам уже не придется. Употребляемые при обычном умножении три ряда промежуточных чисел нами не используются.

Имеются два пути решения данной задачи. Каждый из них в определенных ситуациях имеет свои преимущества, но оба в конечном счете приводят к правильному ответу. К счастью, они имеют много общего, так что легко усвоить оба. В этой главе мы рассмотрим тот путь, который мы называем «прямым» методом умножения. Он больше применяется в тех случаях, когда множимые содержат малые цифры, такие, как 1, 2 и 3. В следующей главе мы используем другой метод, который мы назовем «быстрым умножением».

Еще раз отметим, что оба метода могут быть применены при решении любой задачи. Мы только что высказали свою точку зрения на то, когда какой метод предпочтительней применить, но это всецело вопрос удобства, и в каждом отдельном случае вы можете сделать выбор по собственному усмотрению. Между прочим, заметим, что системой быстрого умножения, сходной с прямым методом, пользовались, по-видимому, мастера быстрого счета еще до введения системы Трахтенберга. Эти «чародеи-математики», которые эффектными фокусами устного счета приводили зрителей в изумление, по обыкновению хранили свои приемы быстрого счета в абсолютной тайне; все же представляется, что они, должно быть, пользовались чем-то, что походит на наш прямой метод умножения, — может быть, с некоторыми изменениями.

Разрешите начать с простого примера прямого метода и от него двигаться к решению более сложных; сначала мы будем умножать сравнительно малое число на другое сравнительно малое число.

УМНОЖЕНИЕ ДВУЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ НА ДВУЗНАЧНЫЕ

Предположим, мы хотим 23 умножить на 14. Мы пишем это по следующей форме:

$$0\,0\,2\,3 \times 14$$

(результат пишется здесь под чертой).

Запомним прежде всего, что при перемножении двузначных чисел мы ставим перед множимым 2 нуля.

Ответ пишется под 0023, цифра за цифрой, начиная справа. Это означает, что последнюю цифру ответа мы должны написать под 3 и, двигаясь влево цифра за цифрой, записать оставшуюся часть ответа.

П е р в ы й ш а г. Умножим крайнюю справа цифру множимого (3) на крайнюю справа цифру множителя (4). В ответе мы записываем 2 от числа 12 и переносим 1 (используя точку):

$$\frac{0\,0\,2\,3}{\dot{}2} \times 14$$

$3 \times 4 = 12$; пишем 2 и переносим 1.

В т о р о й ш а г. Следующая цифра результата пишется под второй цифрой справа (2); она получается путем сложения двух промежуточных слагаемых. Одно из них (8) получается при умножении цифр 2 и 4:

$$\frac{0\,0\,2\,\overset{*}{3}}{\dot{}2} \times 1\overset{*}{4}$$

Второе промежуточное слагаемое получается в результате перемножения 3 и 1:

$$\frac{0\,0\,2\,3}{\dot{}2} \times 14$$

Сложим теперь оба промежуточных результата: $8 + 3 = 11$; прибавим теперь перенесенную 1, так что следующая «цифра» ответа будет 12; значит, пишем 2 и 1 переносим:

```
0 0 2 3 × 14
─────────
    ·2 ·2
```

$2 \times 4 = 8$; $3 \times 1 = 3$; $8 + 3 = 11$; прибавляя перенесенную 1, получим 12.

Последний шаг. Умножим левую цифру множимого (2) на левую цифру множителя (1):

```
0 0 2 3 × 14
─────────
  3 ·2 ·2
```

$2 \times 1 = 2$ плюс перенесенная 1, будет 3.

В этом случае нам нет необходимости использовать левый нуль, который мы написали перед числом. Нуль стоит там только для того, чтобы дать место для переносимой цифры в том случае, когда встретится число, большее или равное 10.

Второй шаг является для нас новым. Для получения одной цифры результата мы использовали 4 цифры сомножителей. Промежуточные результаты (8 и 3) мы получили в результате перемножения двух пар чисел, которые мы будем называть «внешней парой» и «внутренней парой».

```
0 0 2 3   ×   1  4
─────────     ↓  ↓
     ·2       3+8
  ·2
```

$3 + 8 = 11$ плюс перенос.

Правило нахождения этих пар следующее:

Цифра множимого, которую мы в данный момент обрабатываем, т. е. цифра, стоящая над очередной искомой цифрой результата, является частью внешней пары (в приведенном примере это цифра 2 из числа 23).

Другой цифрой внешней пары будет правая цифра множителя (в нашем примере это 4 из числа 14). *Вторая пара — внутренняя* (3 и 1) *образуется из цифр, стоящих непосредственно друг возле друга, внутри только что использованной внешней пары.*

«Внешней парой» и «внутренней парой» мы будем пользоваться часто. Поэтому эти понятия надо хорошо усвоить. Рассмотрим следующие три задачи:

46×87	72×34	28×92
4×7 *внешняя пара*	7×4 *внешняя пара*	2×2 *внешняя пара*
6×8 *внутренняя пара*	2×3 *внутренняя пара*	8×9 *внутренняя пара*

46×87 **72×34** **28×92**

Пример. Умножение 38 на 14. Припишем к числу 38 слева 2 нуля:

$$0038 \times 14$$

Первый шаг. Прежде всего мы умножаем 8 на 4 и получаем 32. Пишем 2 и переносим 3:

$$\frac{0\;0\;3\;\overset{*}{8}}{\cdot\cdot\cdot 2} \times 1\overset{*}{4}$$

Второй шаг. Чтобы найти следующее число, мы используем внешнюю и внутреннюю пары. Цифра числа 38, с которой мы сейчас работаем, это 3, так как она стоит как раз над тем местом, где появится очередная цифра нашего ответа. Поэтому 3 является частью внешней пары. Какова же другая цифра внешней пары? Конечно, 4 (внешняя цифра числа 14). Между этими цифрами — внутренняя пара (8 и 1):

$$\frac{0\;0\;3\;\;8}{\cdot\cdot\cdot 2} \times 1\;4$$

Теперь умножайте: 3 на 4, будет 12; 8 на 1, будет 8. Сложите эти два частичных произведения (12 и 8), и вы получите 20. Так как нужно прибавить перенесенную 3, в результате — 23. Напишите 3 и перенесите 2:

$$\frac{0\;0\;\;3\;\;8}{\cdot\cdot 3\;\cdot\cdot\cdot 2} \times 1\;4$$

Последний шаг. Умножьте обе левых цифры (3 из числа 38 и 1 из числа 14). Это дает 3; перенесенная 2 увеличивает ее до 5:

$$\frac{0\;0\;\;\overset{*}{3}\;\;8}{0\;5\;\cdot\cdot 3\;\cdot\cdot\cdot 2} \times \overset{*}{1}4$$

Ниже приведено решение еще двух примеров. Подчеркнутые цифры перенесенные. Посмотрите, сможете ли вы объяснить, откуда получились цифры в строке «действие».

$$\underline{0\,0\;3\;2} \times 2\;2$$

Ответ: 7 ·0 4

Действие: 6 6 4

$+\;+$

$\underline{1}\;\;4$

$$\underline{0\,0\;\;\;6\;\;6} \times 3\;4$$

Ответ: 2 2 4 4

Действие: 1 8 24 4

\+ +

4 18

\+

2

Возможно, что для собственного удовлетворения вам захочется решить одну или две задачи самостоятельно. Вот несколько задач с ответами:

1) 0 0 3 1 × 1 5; 3) 0 0 7 3 × 6 4; 5) 0 0 4 2 × 2 6;
2) 0 0 1 7 × 2 4; 4) 0 0 3 4 × 2 1; 6) 0 0 4 8 × 5 2.

Ответы: 1) 465; 2) 408; 3) 4672; 4) 714; 5) 1092; 6) 2496.

Если вы проанализируете те действия, которые мы сейчас разбирали, то убедитесь, что они очень просты. Вам требовалось перемножить два двузначных числа. Чтобы выполнить это, вы находили правую цифру ответа, перемножив обе правые цифры (так, при умножении 23 на 14 вы умножили 3 на 4). Чтобы найти левую цифру ответа, вы перемножили обе левые цифры (умножая 23 на 14, вы умножили 2 на 1). Чтобы получить средние цифры ответа, вы использовали внешнюю и внутреннюю пары. Каждая пара состоит из двух цифр, умножаемых одна на другую, так что каждая пара дает одно число. Затем оба эти числа складываются, и вы получаете часть результата.

В дальнейшем мы этими внешними и внутренними парами будем пользоваться все чаще и больше. Разумеется, когда вы самостоятельно решаете задачу, нет необходимости выделять пары с помощью кривых, связывающих цифры. В первых параграфах это было сделано лишь для того, чтобы объяснить метод решения задачи. На практике внешнюю пару можно определить тем, что она содержит ту цифру множимого, которая стоит прямо над следующим свободным местом, где станет следующая цифра ответа. Внутренняя пара — это пара цифр, стоящих между цифрами внешней пары.

МНОГОЗНАЧНЫЕ МНОЖИМЫЕ

Когда множимое содержит более двух знаков, мы должны повторять второй шаг столько раз, сколько потребует данное число. Предположим, например, вы хотите 312 умножить на 14. В этом случае всего лишь три цифры вместо двух, однако он проиллюстрирует суть приема:

Первый шаг. Умножьте правую цифру числа 312 на правую цифру числа 14:

0 0 3 1 2* × 1 4*

8

Второй шаг. Используйте теперь внешнюю и внутреннюю пары. Следующая цифра, которую мы обрабатываем, это 1 иэ числа 312. Это цифра, которая стоит прямо над местом, куда станет очередная цифра ответа. Значит, 1 — часть внешней пары:

Ответ:
Действие:

$$\begin{array}{l} \underline{0\,0\,3\,1\,2} \times 1\,4 \\ \underline{\quad\;\; 6\,8} \\ \quad\;\; 4 \\ \quad\;\; + \\ \quad\;\; 2 \end{array}$$

Внешняя пара: 1 × 4, дает 4; внутренняя пара: 2 × 1, дает 2; 4 плюс 2, будет 6.

Третий шаг. Повторяется второй шаг, но с передвижением пар. Это оэначает, что мы получаем другие пары чисел, однако по-прежнему следующая цифра числа 312, которую мы используем, стоит над очередным подлежащим заполнению местом и является частью внешней пары. В этом примере цифра 3 есть часть нашей новой внешней пары. Итак, мы имеем:

Ответ:
Действие:

$$\begin{array}{l} \underline{0\,0\,3\,1\,2} \times 1\,4 \\ \underline{\quad\; \dot{}3\,6\,8} \\ \quad\; 12 \\ \quad\;\; + \\ \quad\;\; 1 \end{array}$$

Внешняя пара: 3 × 4 = 12; внутренняя пара: 1 × 1 = 1; 12 + 1 = 13; напишем 3 и перенесем 1.

Последний шаг. Чтобы найти левую цифру ответа, перемножьте обе левые цифры (3 и 1) и затем прибавьте перенесенную 1:

$$\begin{array}{ll} & \underline{0\,0\,\overset{*}{3}\,1\,2} \times \overset{*}{1}\,4 \\ \text{Ответ:} & \underline{\;\;4\,\dot{}3\,6\,8} \\ \text{Действие:} & \;\;3 \times 1 \\ & \quad + \\ & \text{точка} \end{array}$$

В дальнейшем нам придется распространить этот метод и на нули, стоящие впереди множимого. Посмотрим, как это происходит. Мы помним, что *любое число, умноженное на нуль, дает нуль.*

Значит, при умножении нуль «уничтожает» любое другое число. Миллион, умноженный на нуль, дает нуль. Используйте этот факт и делайте последний шаг так, как если бы это был средний шаг:

Последний шаг.

```
                       0 0 3 1 2  ×  1 4
                        4·3 6 8
Ответ:                 ─────────
Действие:               0
                        +
                        3
                        +
                       точка
```

Внешняя пара: 0, умноженный на 4, будет 0. Внутренняя пара: 3, умноженное на 1, будет 3. 0 плюс 3, будет 3. Прибавив точку, получаем 4. Конечно, этот результат равен прежнему, полученному другим способом. Поэтому последний шаг мы можем проделать по тому же методу, что второй и третий. Значит, мы можем продолжать пользоваться внешними и внутренними парами, а не вводить для последнего шага специальное правило. Каждый раз, когда мы даем строку цифр и помечаем ее словом «действие», это значит, что на практике соответствующее действие должно производиться в уме. Мы здесь подробно излагали ход решения только для объяснения процесса работы. При решении задачи вы пишете только обе цифры, которые хотите перемножить, и ответ.

Последние примеры еще раз показали, как расположена внешняя пара. Она всегда определяется тем, что содержит цифру множимого, стоящую непосредственно над очередной искомой цифрой ответа.

```
                                 0 0 5 3 2 1 0 4 0 2  ×  6 4
Промежуточный результат                    6 5 7 2 8
```

Второй конец кривой должен вести к правой цифре двузначного множителя, так как она является внешней. Затем уже образуется внутренняя пара.

Вы, по всей вероятности, сочтете хорошей идеей отмечать во время решения задач цифры внешних и внутренних пар, покрывая своими пальцами соответствующие части чисел. Труда это особого не представляет, но предупреждает ошибки, которые могут возникнуть при потере нужного в данный момент места. При умножении трехзначных чисел на двузначные нет особой опасности потерять правильное место, однако мы скоро перейдем к рассмотрению более длинных чисел, и там это будет существенно. Во всех случаях безусловно рекомендуется писать цифры четко, с промежутками, а ответ писать прямо под цифрами, к которым он относится. Аккуратность помогает избежать ненужных ошибок. Она полезна, кстати, не только в этой работе.

Для проверки усвоения метода рассмотрите пример умножения 311 на 23. Под числом 311 стоит ответ, а ниже — сделанные в уме подсчеты. Теперь прикройте кусочком бумаги «ответ» и «действие» и вычислите в уме правую цифру ответа. Сдвиньте теперь бумагу настолько, чтобы увидеть первую цифру ответа, и вы узнаете, правильно ли ваше вычисление. Затем вычислите очередную цифру ответа и снова передвиньте бумагу настолько, чтобы вы смогли сличить, правильна ли она. В случае, если она неверна, сдвиньте бумагу, чтобы открыть строку «действие», относящуюся к данной цифре, и вы увидите, как она получилась. В строке «действие» цифры, стоящие друг над другом, должны быть сложены, чтобы получить цифру ответа:

	0	0	3	1	1 × 23
Ответ:		7	·1	5	3
Действие:		0 × 3	3 × 3	1 × 3	1 × 3
		3 × 2	1 × 2	1 × 2	
		(точка)			

Во всех примерах, которые мы видели до сих пор, перед множимым ставились два нуля. В этих примерах, правда, достаточно было бы и одного. Рассмотрим, однако, такой пример:

	0	0	5	2	2 × 31
Ответ:	1	·6	·1	8	2
Действие:	0 × 1	0 × 1	5 × 1	2 × 1	2 × 1
	+	+	+	+	
	0 × 3	5 × 3	2 × 3	2 × 3	
	+	+			
	точка	точка			

В этом примере мы уже использовали оба нуля. Обратите все же внимание, что цифра, стоящая под левым нулем, это либо точка, либо перенесенная 1. Это объясняет, почему в предыдущих примерах нам не потребовалось двух нулей. Хватило одного нуля перед множимым, так как в последнем шаге нечего было переносить.

Итак, запишем общее правило:

При умножении на множитель любой длины ставьте перед множимым столько нулей, сколько знаков во множителе.

Иногда мы не будем использовать все нули, но следовать общим правилам проще, чем заранее думать об исключениях. К недоразумениям это не приводит.

До сих пор мы рассматривали только двузначные или трехзначные множимые, но и умножение многозначных чисел, как например 241 304 × 32, производится по этому же методу. Мы просто повторяем шаг с перемножением двух пар цифр и сложением результатов. Предположим, вы хотите умножить 241 304 на 32:

	0	0	2	4	1	3	0	4	×	3 2
Ответ:						7	·2	8		
Действие:						6	0			
						0	12			
						точка				

Это частичное решение примера совершенно того же типа, что и задачи, которые мы решали с трехзначным множимым. Следующий шаг делается в том же духе:

Ответ:										
Действие:										
	0	**0**	**2**	**4**	**1**	**3**	**0**	**4**	×	**3 2**
					·1	**7**	**2**	**8**		
					2					
					+					
					9					

2 — это 1, умноженное на 2;
9 — это 3, умноженное на 3.

Мы складываем 2 и 9, и полученное число 11 дает очередную цифру ответа. Мы пишем 1 как часть ответа и точку, означающую перенос 1. Затем двигаемся дальше влево. Следующие пары составляются из 4 и 1 и из 3 и 2, это дает нам 4, умноженное на 2, плюс 1, умноженное на 3. Полное решение таково:

	0 0	2	4	1	3	0	4	×	3 2
Ответ:	7	·7	·2	·1	7	·2	8		
Действие:	0	4	8	2	6	0	8		
	0	12	3	9	0	12			
	точка	точка	точка		точка				

Самый крайний нуль слева не используется. Это один из тех случаев, когда в последнем шаге ничего не переносится, поэтому под этим нулем ничего не пишется.

Заметим, что при нашем методе сохраняет полную силу обычное правило:

Собирайте все нули множимого и множителя и ставьте их в конце ответа, затем приступайте к умножению, не обращая на них внимания.

Например, вот наша первая задача:

0	0	2	3	×	1	4
	3	2	2			

Предположим, мы хотели 230 000 умножить на 140. Какой будет ответ? Решайте задачу, как и раньше, без нулей, затем со-берите все стоящие в конце чисел пять нулей и припишите их к вашему ответу:

$$\underline{0\,0\,2\,3} \times 1\,4$$
$$3\,2\,2\,0\,0\,0\,0\,0$$

Ответ: 32 200 000.

ТРЕХЗНАЧНЫЕ МНОЖИТЕЛИ

До сих пор мы умножали различные числа на множители, состоящие только из двух цифр. Множимое могло быть и многозначным, например 241 304, но множитель пока всегда был двузначным. Как же мы будем умножать различные числа на трехзначный множитель? Возьмем такой пример: 213 умножить на 121. Множитель трехзначный, следовательно, мы перед множимым пишем три нуля:

$$0\,0\,0\,2\,1\,3 \times 1\,2\,1$$

Это соответствует правилу, о котором мы уже упоминали раньше, а именно мы ставим перед множимым столько нулей, сколько цифр содержит множитель. (Иногда, как мы это уже видели, один из этих нулей оказывается затем лишним.) Сейчас решим этот пример шаг за шагом, находя при каждом шаге одну цифру ответа.

Первый шаг. $0\,0\,0\,2\,1\,\underline{3} \times 1\,2\,\underline{1}$

Ответ: 3

3 умножить на 1, будет 3.

Второй шаг. $0\,0\,0\,2\,\underline{1}\,\underline{\underline{3}} \times 1\,\underline{\underline{2}}\,\underline{1}$

Ответ: $7\,3$

Действие: $1 \times 1 + 3 \times 2$

(Цифры, подчеркнутые один раз, перемножаются между собой; перемножаются также цифры, подчеркнутые дважды.)

До сих пор мы в первых двух шагах проделали только то, что делали в предыдущем разделе. Пока что вычисление такое же, как если бы мы умножали 13 на 21, а не 213 на 121.

Третий шаг. Это уже новый шаг — мы получаем очередную цифру ответа путем сложения трех пар чисел, а не двух:

$$0\,0\,0\,\underline{2}\,\underline{\underline{1}}\,\underline{\underline{\underline{3}}} \times \underline{\underline{\underline{1}}}\,\underline{\underline{2}}\,\underline{1}$$

Ответ: $\cdot\,7\,7\,3$

Действие: $2 \times 1 + 1 \times 2 + 3 \times 1$

Как протекает «действие», легко можно проследить по тому, как напечатаны числа. Чтобы сделать это более наглядным, мы можем, как и раньше, соединить «внешние» и «внутренние» пары, но теперь мы будем иметь еще и «среднюю» пару:

0 0 0 2 1 3 × 1 2 1

Внешняя линия связывает цифру 2 числа 213 с последней цифрой 1 числа 121. Умножаем 2 на 1. Таким образом, внешняя пара дает одно из слагаемых, определяющих цифру ответа. Далее, средняя линия связывает цифру 1 числа 213 с цифрой 2 числа 121. Умножаем 1 на 2 и получаем второе слагаемое. Третье, последнее слагаемое мы получаем от внутренней пары, которая дает нам 3, умноженное на 1. Определяется цифрами 3 (от числа 213) и 1 (от числа 121). Умножаем 3 на 1 и складываем все полученные слагаемые, а именно 2 плюс 2 плюс 3; мы получим 7 — очередную цифру результата. Внешняя пара (2 и 1) определяется тем же правилом, что и раньше: цифра множимого, находящаяся прямо над свободным местом для ответа, является частью внешней пары. Вторая цифра внешней пары есть последняя цифра числа 121. Соседние с ней цифры образуют среднюю пару, а остальные цифры — внутреннюю пару.

Остальные шаги состоят в повторении этого пункта, но со сдвигом влево.

Четвертый шаг.

Действие:

0 0 0 2 1 3 × 1 2 1
5 7 7 3

0×1
+
2×2
+
1×1

5 в ответе — это 0 + 4 + 1.

Последний шаг.

Действие:

0 0 0 2 1 3 × 1 2 1
2 5 7 7 3

0×1
+
0×2
+
2×1

2 в ответе — это 0 + 0 + 2.

В данном примере это последний шаг, так как цифру 2 мы нашли без всякого переноса. Нуль, стоящий перед ответом, мог бы понадобиться в случае появления цифры переноса в последнем шаге. В данном случае переносить нечего и мы его просто опустим. Окончательный ответ: 25 773.

Этот пример, разумеется, лишь потому кажется довольно длинным, что он перегружен подробными объяснениями. На практике он решается быстро. Следующий пример по структуре своей ближе к практической работе. Подчеркивание цифр заменяет указание пальцами на «продвижение внутрь» для определения внешних и внутренних пар. Цифры, подчеркнутые одной чертой, подчеркнутые дважды и подчеркнутые трижды, должны быть соответственно перемножены между собой.

П е р в ы й ш а г.

$$\begin{array}{r} 0\;0\;0\;3\;0\;\underline{2} \quad \times \quad 1\;1\;4 \\ 8 \qquad\qquad\quad \end{array}$$

В т о р о й ш а г. (Разумеется, при решении задачи на практике мы не будем снова писать все числа!)

$$\begin{array}{r} 0\;0\;0\;3\;\underline{0}\;\underline{\underline{2}} \quad \times \quad 1\;\underline{\underline{1}}\;\underline{4} \\ 2\;8 \qquad\qquad\quad \end{array}$$

Нуль плюс 2, будет 2.

Т р е т и й ш а г.

$$\begin{array}{r} 0\;0\;0\;\underline{3}\;\underline{\underline{0}}\;\underline{\underline{\underline{2}}} \quad \times \quad \underline{\underline{\underline{1}}}\;\underline{\underline{1}}\;\underline{4} \\ \cdot 4\;2\;8 \qquad\qquad\quad \end{array}$$

12 плюс 0 плюс 2, будет 14

Ч е т в е р т ы й ш а г.

$$\begin{array}{r} 0\;0\;\underline{0}\;\underline{\underline{3}}\;\underline{\underline{\underline{0}}}\;2 \quad \times \quad \underline{\underline{\underline{1}}}\;\underline{\underline{1}}\;\underline{4} \\ 4\cdot 4\;2\;8 \qquad\qquad\quad \end{array}$$

Нуль плюс 3 плюс 0 «плюс точка», будет 4.

П о с л е д н и й ш а г.

$$\begin{array}{r} 0\;\underline{0}\;\underline{\underline{0}}\;\underline{\underline{\underline{3}}}\;0\;2 \quad \times \quad \underline{\underline{\underline{1}}}\;\underline{\underline{1}}\;\underline{4} \\ 3\;4\cdot 4\;2\;8 \qquad\qquad\quad \end{array}$$

Нуль плюс нуль плюс 3, будет 3.

Это — последний шаг, переносить уже нечего (нет точки); если бы там стояла точка, мы бы поставили 1 под левым нулем, а если бы стояли две точки, мы бы поставили под самым левым нулем 2.

О т в е т: 34 428.

В конце концов вы сами убедитесь, как, в сущности, лёгко решаются такие задачи, когда вы одну из них решите самостоятельно.

Если хотите, вы можете для упражнения сами составить себе несколько задач и решить их. Вам будет легче, если вы сначала начнете с умножения на двузначные множители, скажем 23 или 31, и лишь после этого перейдете к трехзначным множителям.

Этот метод может быть использован для умножения любых многозначных чисел. Однако, если число состоит из нескольких больших цифр, как например 9869, то легко убедиться, что, применяя метод, описанный в этой главе, мы должны будем переносить слишком большие числа. Поэтому в приведенных примерах мы предпочли ограничиться числами, состоящими из малых цифр: 1, 2, 3. Если вы хотите попробовать решить одну или две задачи с числами, состоящими из больших цифр, то вам легче будет это сделать после прочтения следующей главы о быстром умножении, которое требует переноса всегда только 1 или 2. А пока что метод этой главы оказывается очень полезным для работы с числами, состоящими из малых цифр.

МНОЖИТЕЛИ ЛЮБОЙ ДЛИНЫ

Для умножения более длинных чисел мы используем те же самые принципы. При четырехзначных множителях действуют следующим образом. Каждая цифра ответа находится путем сложения четырех частей промежуточных результатов, каждый из которых является результатом перемножения двух цифр. Каких двух цифр? Опять-таки тех, которые соединяются кривой линией, другими словами, составляют внешние и внутренние пары. Возьмем такой пример: 2103 умножить на 3214. Спереди мы ставим уже четыре нуля, так как 3214 состоит из четырех цифр:

$$0\,0\,0\,0\,2\,1\,0\,3 \times 3\,2\,1\,4$$

Здесь показаны четыре пары, которые нами используются для получения одной из цифр ответа. Вот как будет происходить действие:

П е р в ы й ш а г:

$$0\,0\,0\,0\,2\,1\,0\,\underline{3} \times 3\,2\,1\,\underline{4}$$

$$\dot{2}$$

3, умноженное на 4, будет 12.

В т о р о й ш а г:

$$0\,0\,0\,0\,2\,1\,\underline{0}\,\underline{\underline{3}} \times 3\,2\,\underline{\underline{1}}\,\underline{4}$$

$$4\;2$$

Нуль плюс 3 «плюс точка».

Третий шаг:

0 0 0 0 2 1 0 3 × 3 2 1 4

˙0 4 ˙2 — *4 плюс нуль плюс 6.*

Четвертый шаг:

0 0 0 0 2 1 0 3 × 3 2 1 4

˙9 ˙0 4 ˙2 — *8 плюс 1 плюс нуль плюс 9 «плюс точка».*

Пятый шаг:

0 0 0 0 2 1 0 3 × 3 2 1 4

5 ˙9 ˙0 4 ˙2 — *Нуль плюс 2 плюс 2 плюс нуль «плюс точка».*

Шестой шаг:

0 0 0 0 2 1 0 3 × 3 2 1 4

7 5 ˙9 ˙0 4 ˙2 — *Нуль плюс нуль плюс 4 плюс 3.*

Седьмой шаг:

0 0 0 0 2 1 0 3 × 3 2 1 4

6 7 5 ˙9 ˙0 4 ˙2 — *Нуль плюс нуль плюс нуль плюс 6.*

Переносить нечего, и все пары цифр дадут нуль, следовательно, решение закончено.

Ответ: 6 759 042.

Из этого примера ясно, как решаются задачи на умножение многозначных чисел на многозначные.

РЕЗЮМЕ

Итак, во всех этих случаях, т. е. при перемножении сомножителей любой длины, мы получаем правую цифру ответа, перемножив правые цифры обоих чисел. Средние цифры ответа получают, пользуясь внешними и внутренними парами и складывая промежуточные результаты. Наконец, для получения левой цифры или цифр мы пишем впереди множимого столько нулей, сколько знаков в множителе, и применяем к ним правило внешних и внутренних пар.

Предлагаем читателю в качестве упражнений следующие примеры:

1) 31×23;	5) 224×32;	8) 341×63;
2) 23×41;	6) 705×25;	9) 4133×212;
3) 63×52;	7) 511×61;	10) $31\,552 \times 3131$.
4) 413×24;		

Ответы: 1) 713; 2) 1353; 3) 3276; 4) 9912; 5) 7168; 6) 17 625; 7) 31 171; 8) 21 483; 9) 876 196; 10) 98 695 382.

ПРОВЕРКА РЕЗУЛЬТАТА

Описываемый ниже метод проверки результата не принадлежит Трахтенбергу, но естественно включается в его систему ввиду своей простоты и удобства. Математикам этот метод известен сотни лет, но в повседневной жизни он, видимо, мало используется и не специалисту не очень-то знаком. Мы будем называть его «методом суммы цифр».

Как вам, конечно, хорошо известно, каждое число записывается с помощью цифр: от 0 до 9. «Сумму цифр» какого-либо числа мы получаем, складывая все однозначные числа, представленные входящими в его запись цифрами.

Например, сумма цифр числа 413 равна $4 + 1 + 3 = 8$. Если сумма цифр числа является многозначным числом, то мы находим в свою очередь сумму цифр самой этой суммы. Например, нам дано число 6324. Сумма его цифр равна $6 + 3 + 2 + 4 = 15$. А сумма цифр этой промежуточной суммы равна $1 + 5 = 6$. И вот эту-то окончательную сумму, записываемую одной цифрой, мы и будем всегда понимать под «суммой цифр». Таким образом, сумма цифр всегда сводится к одной цифре (точнее, однозначному числу).

Для проверки умножения мы должны найти три суммы цифр: *сумму цифр множимого, сумму цифр множителя и сумму цифр произведения*. Предположим, мы решили следующий пример и хотим проверить наш ответ:

$$\frac{0\,0\,2\,0\,4 \quad \times \quad 3\,1}{6\,3\,2\,4}$$

Подсчитаем суммы цифр:

	Число	Сумма цифр
Множимое	2 0 4	6
Множитель	3 1	4
Произведение	6 3 2 4	6

Правило для проверки вычисления таково:

Сумма цифр произведения должна быть равна сумме цифр произведения сумм цифр множителя и множимого.

Если они не равны, значит, где-то сделана ошибка. В нашем примере сумма цифр произведения 6324 есть 6, а сумма цифр произведения сумм цифр сомножителей ($6 \times 4 = 24$) равна $2 + + 4 = 6$. Результаты совпадают, значит, задача решена правильно.

Перемножать суммы цифр всегда очень легко, ибо они всегда однозначные числа. Проверку производят обычно одновременно с основным умножением.

Заметим в заключение, что при вычислении сумм цифр больших чисел мы можем сэкономить время с помощью следующих простых приемов:

1) *Приводить к одиночной цифре можно (и должно!) по ходу сложения,* не дожидаясь конца числа. Предположим, вы подсчитываете сумму цифр числа 252 311. Начните слева и складывайте: 2 плюс 5 плюс 2 и т. д. Говорите про себя суммы: 2, 7, 9, 12. Дойдя до 12, сложите сумму цифр этого числа ($1 + 2 = 3$) и теперь прибавляйте оставшиеся две цифры нашего числа ($1 + 1$) уже к этой тройке. Сумма цифр равна 5. Такой прием очень длинных чисел может нам дать существенную экономию времени.

2) *Не обращайте внимания на 9.* В том случае, когда число, цифры которого вы складываете, содержит одну или несколько девяток, пропустите их и при сложении не учитывайте.

Вы получите такой же результат, как если бы вы учитывали эти девятки при сложении. Так, сумма цифр числа 9 399 равна 3, так что мы можем просто игнорировать девятки. Кроме того, когда сумма двух (или трех) соседних цифр равна 9, можно опустить и эти цифры. Скажем, сумма цифр числа 81 994 будет 4, так как 8 плюс 1 будет 9, а девять в расчет не берется. Этим правилом лучше пользоваться только в тех случаях, когда цифры, дающие в сумме 9, стоят рядом или хотя бы близко друг от друга. В противном случае вы можете забыть, что решили их опустить, и одну из них включить в сложение.

Глава третья

БЫСТРОЕ УМНОЖЕНИЕ—МЕТОД «ДВУХ ПАЛЬЦЕВ»

Важнейшее преимущество системы Трахтенберга состоит в том, что мы можем, умножая любое число на любое другое число, сразу же писать ответ. Мы не пишем, как при обычном умножении, промежуточные результаты. Прямой метод, который рассматривали в предыдущей главе, может быть использован при перемножении двух любых чисел. Однако во многих случаях он нуждается в дальнейших усовершенствованиях, которые мы и опишем в этой главе. Когда числа, которые мы перемножаем, состоят из больших цифр, как скажем 978×647, нам, пользуясь прямым методом, приходится складывать в уме и переносить большие числа. Дальнейшее усовершенствование метода как раз и преследует ту цель, чтобы избавиться от действий в уме с неудобно большими числами. Это достигается тем, что мы дополняем метод новым приемом, который Трахтенберг назвал методом «двух пальцев». Он мог бы также называться методом «единиц и десятков». По ходу изложения этого метода вы сами увидите, откуда происходят оба названия.

Давайте сначала познакомимся с существом нового приема, а затем уже применим его практически к задаче на умножение больших чисел.

Итак, забудем на время способ умножения, которым мы пользовались до сих пор, и сосредоточим свое внимание на следующих пунктах:

1. Всякая цифра изображает однозначное число. (Нуль — тоже цифра.)

2. Когда мы умножаем цифру на цифру, мы получаем или однозначное, или двузначное число.

3. Однозначное число, полученное от перемножения двух однозначных чисел (например, $6 = 2 \times 3$), нам будет часто удобнее записывать в виде «двузначного числа», состоящего из данного однозначного с приписанным спереди к нему нулем (в нашем примере — 06). Разумеется, это приписывание нуля не влияет на величину числа.

4. В любом двузначном числе левую цифру мы будем называть цифрой десятков, а правую — цифрой единиц. Например, в числе 37 цифра десятков — 3, а цифра единиц — 7.

5. Применяя излагаемый метод, мы часто будем использовать только цифру единиц числа. Например, мы можем, работая с числом 24, сказать только «4», не обращая внимания на 2 — цифру десятков. В других случаях мы будем использовать только цифру десятков и забывать цифру единиц. В таких случаях мы, глядя на 24, скажем «2».

6. (Самый существенный пункт!) В новом методе нам часто придется объединять положения, изложенные во 2-м и 5-м пунктах. Это значит, что, перемножая две цифры (например, 3 на 8), мы используем только цифру единиц результата (4 от числа $24 = 3 \times 8$), а в других случаях — только цифру десятков (например, при умножении 5 на 7 использовать только 3, т. е. цифру десятков числа 35).

Эту необычную «операцию» надо привыкнуть производить в уме. Назовите в качестве упражнения цифру единиц следующих произведений: 1) 4×3; 2) 3×6; 3) 5×4; 4) 8×2. (Ответы: 2, 8, 0, 6.) А теперь — цифры десятков. (Ответы: 1, 1, 2, 1.)

7. Вот откуда происходит название метода — «единицы и десятки». Поставьте рядом две цифры, например 3 и 8. Умножьте каждую из них на другую цифру, скажем на 4, и берите в результате только цифру единиц, когда умножаете левую цифру (3), и цифру десятков, когда умножаете правую цифру (8). Буква Е будет означать, что мы удерживаем только единицы результата, Д — что мы удерживаем только десятки. Результат (с отпавшими цифрами в скобках) будет таким:

$$\begin{array}{cccccc} & \text{Е} & \text{Д} & & \\ & 3 & 8 & \times & 4 \\ \hline (1) & 2 & 3 & (2) & \end{array}$$

Впредь Е и Д у нас всегда будут располагаться в таком порядке. Под левой цифрой пары (например, 3 от числа 38) мы используем только цифру единиц произведения; под правой цифрой пары (8 от числа 38) — только цифру десятков произведения.

8. Наконец, мы делаем еще один очень простой шаг: складываем обе цифры, которые нашли в 7-м пункте. В данном примере мы нашли цифры 2 и 3. Сложим их и получим 5. Это и есть тот результат, которым мы будем пользоваться при выполнении умножений.

Обратите внимание на то, что из пары цифр 38 мы получили только одну цифру 5. Мы «умножили» 38 на 4, однако это не было обычное умножение. Это особенность метода «единиц и десятков». Пара цифр умножается на третью цифру, а в результате только одна цифра (5 в приведенном примере). Это происходит потому, что мы используем только единицы одного результата, отбрасывая десятки, и поступаем наоборот со вторым результатом.

Приведем для ясности данный пример полностью.

Задача:

$$\begin{array}{cccc} & \text{Е} & \text{Д} & \\ & 3 & 8 & \times\ 4 \\ \hline 1\ \underline{2} & & \underline{3}\ 2 & \end{array}$$

Действие:

$$\begin{array}{c} 2+3 \\ \hline 5 \end{array}$$

Ответ: 5

Спешим подчеркнуть, что на практике, когда вы овладеете методом, такой полной схемы не потребуется. Ничего не пишется, кроме обрабатываемых чисел, т. е. 38 и результата 5. Более того, после усвоения метода вы должны постараться даже и не думать о поясняющих числах, которые вы видите в схеме. Это должно быть полуавтоматическим мысленным процессом, значительная часть которого происходит без участия сознания. Вы смотрите на 38 и 4, почти автоматически воспринимаете 2 и 3 (вместо 12 и 32) и чуть ли не сразу говорите «5». Такой высокой степени мастерства вы можете достигнуть, как, кстати, и в любом другом деле, только после длительной тренировки.

Чтобы подчеркнуть важность этой операции, мы присваиваем ее результату специальное название: «парное произведение». 5, которое мы получили в вышеприведенном примере, является «парным произведением» от 38 на 4. Вообще, *парное произведение — это число, полученное от умножения пары цифр на другую цифру (множитель) следующим способом: мы используем цифру множителя для умножения каждой цифры пары в отдельности, а затем складываем цифру единиц произведения от левой цифры пары и цифру десятков произведения от правой цифры пары.*

Парное произведение дает нам возможность быстро умножить без переноса больших чисел, да и вообще обходиться без больших чисел. Рассмотрим теперь несколько примеров для ознакомления с некоторыми второстепенными деталями.

Задача:

Действие:

$$\begin{array}{cccc} & \text{Е} & \text{Д} & \\ & 8 & 2 & \times\ 5 \\ \hline 4\ \underline{0} & & \underline{1}\ 0 & \\ & 0 & +\ 1 & \\ \hline & & 1 & \end{array}$$

8, умноженное на 5, будет 40; 2, умноженное на 5, будет 10.

Парное произведение: 1

Задача:

Действие:

$$\begin{array}{cccc} & \text{Е} & \text{Д} & \\ & 4 & 1 & \times\ 3 \\ \hline 1\ \underline{2} & \times & \underline{0}\ 3 & \\ & 2 & +\ 0 & \\ \hline & 2 & & \end{array}$$

4, умноженное на 3, будет 12; 1, умноженное на 3, будет 3 (или 03).

Парное произведение: 2

$$\begin{array}{lccc}
 & \text{Е} & & \text{Д} \\
\text{Задача:} & 1 & & 4 \times 3 \\
\hline
\text{Действие:} & 0\,3 & & 1\,2 \\
 & \overline{3} & + & \overline{1} \\
\hline
\text{Парное произведение:} & & 4 &
\end{array}$$

1, умноженное на 3, будет 03; 4, умноженное на 3, будет 12.

$$\begin{array}{lccc}
 & \text{Е} & & \text{Д} \\
\text{Задача:} & 2 & & 8 \times 4 \\
\hline
\text{Действие:} & 0\,8 & & 3\,2 \\
 & \overline{8} & + & \overline{3} \\
\hline
\text{Парное произведение:} & & 11 &
\end{array}$$

2, умноженное на 4, будет 08; 8, умноженное на 4, будет 32.

Чтобы получить парное произведение, мы складываем две цифры. Иногда при этом мы получаем двузначное число (см. последний пример). Однако обратите внимание, что мы не можем получить числа, большего 18. Следовательно, достаточно одного переноса или одной единственной точки. Этими примерами мы хотели обратить внимание на следующие правила.

1. Во избежание ошибок всякое однозначное произведение нужно изображать с нулем впереди числа. Например, 2, умноженное на 2, будет 04, а 6, умноженное на 1, будет 06. Быстро отмечая в уме цифру десятков от 2×2, мы можем ошибиться из-за торчащей перед глазами цифры 4.

2. Когда мы складываем оба частичных произведения (десятки одного числа и единицы другого), сумма может иногда быть больше 10; это значит, что могут появиться двузначные числа. В этих случаях поступаем, как обычно: пишем цифру единиц (например, 3 от 13) и обозначаем цифру десятков (1 от 13) точкой. Это означает, что мы что-то переносим. Однако при этом нам никогда не придется переносить, например, число 15 для одной цифры ответа, что мы вынуждены были бы делать при других видах умножения, когда в итоге получается, например, 153. То, что переносимая цифра всегда мала, еще важно и тем, что все цифры, с которыми приходится работать, малы.

3. Помните всегда о том, что нуль, умноженный ва любое число, дает нуль, а любое число, умноженное на 1, всегда остается без изменения.

4. Для тренировки достаточно несколько раз полностью вычислить парное произведение по показанной выше схеме. Проделав одно или два упражнения письменно, вы должны постараться, хорошенько сосредоточившись, мысленно увидеть оба числа (к примеру, 12 и 32) и объединить внутренние цифры (чтобы получить 5). Это довольно легко мысленно представить даже без предварительных упражнений. Главное — не сбиться.

Попробуйте решить в уме несколько задач:

1) Е Д
6 4 × 3;

2) Е Д
3 5 × 7;

3) Е Д
6 3 × 5;

4) Е Д
7 5 × 7;

5) Е Д
6 6 × 5;

6) Е Д
2 6 × 3;

7) Е Д
7 2 × 5;

8) Е Д
9 4 × 3;

9) Е Д
4 1 × 8;

10) Е Д
1 6 × 6.

Задержитесь здесь на минутку. Вам до сих пор все ясно? Если нет, то полезно будет вернуться и снова перечесть все требуемое. Положения, которые мы рассмотрели на последних страницах, несложны, но очень важно, чтобы они были для вас абсолютно ясны. Они — душа метода, изложенного в этой главе.

УМНОЖЕНИЕ НА ОДНОЗНАЧНЫЕ ЧИСЛА

Мы можем использовать теперь рассмотренные выше парные произведения для выполнения простых видов умножений. Предположим, мы хотим 3112 умножить на 6. Разумеется, задача эта легкая, но мы начнем с легких и постепенно дойдем до более трудных. Пользуясь парными произведениями, мы применим новый метод выполнения умножений. Основное правило гласит:

Каждое парное произведение есть одна цифра искомого ответа.

Давайте полностью сделаем один пример. Напишем его с нулем впереди, как мы зто делали в последней главе. Мы пишем Е от ЕД над тем местом, где станет очередная цифра ответа (сейчас зто первая цифра):

Е Д
0 3 1 1 2 × 6

Букве Д пока делать нечего, так как под ней нет цифры. Мы просто берем единицы от цифры 2, умноженной на 6.

ЕД
Первый шаг. 0 3 1 1 2 × 6
2

2 есть цифра единиц от 12.

Е Д
Второй шаг. 0 3 1 1 2 × 6
7 2

ЕД сдвинулись влево; Е от ЕД всегда стоит над местом, где появится очередная цифра ответа, т. е. там, где будет 7. В нашем примере 7 — зто парное произведение цифры единиц из 06 (от 1, умноженной на 6) плюс цифры десятков из 12 (от 2, умноженной на 6).

В первом шаге цифра 2 от числа 3112 была использована как Е. Во втором шаге она снова использовалась, но на этот раз как Д. Так происходит всегда. Каждая цифра множимого используется дважды — один раз под Е от ЕД, а затем под Д.

Третий шаг. Передвиньте ЕД к очередной цифре множимого:

$$\begin{array}{ccccc} & & & \text{Е} & \text{Д} \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ \hline & & 6 & 7 & 2 \end{array} \quad \times \; 6$$

Эта цифра 6 есть парное произведение цифры единиц из 06 (1, умноженная на 6, есть 06) плюс цифра десятков из 06 (снова 1, умноженная на 6, есть 6).

Четвертый шаг. Передвиньте ЕД к следующей цифре множимого:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Е} & \text{Д} & \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 8 & 6 & 7 & 2 \end{array} \quad \times \; 6$$

8 является парным произведением цифры единиц от 18 (3, умноженное на 6) плюс цифра десятков от 06 (1, умноженная на 6, есть 06).

Пятый шаг. Передвиньте ЕД к последней цифре, к нулю перед множимым:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Е} & \text{Д} & & & \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 8 & 6 & 7 & 2 \end{array} \quad \times \; 6$$

Это парное произведение цифры десятков от 18 (3, умноженное на 6) плюс цифра единиц от 00 (нуль, умноженный на 6, будет 0). Когда мы последовательно проведя все операции, доходим до нуля, нам, очевидно, нет необходимости думать о цифрах единиц и цифрах десятков, так как при умножении на нуль «уничтожается» число 6.

В этом методе нет основания избегать больших цифр, как это рекомендовалось в прямом методе умножения. Рассмотрим задачу с большими цифрами. Теперь мы уже освоились с буквами ЕД над парой цифр и можем их опустить. С другой стороны, все же существует некоторое опасение, что мы потеряем правильное место и выберем неверную цифру. Поэтому мы в виде компромисса теперь показываем кривую, на одном конце которой — развилка, чтобы указывать обе цифры пары:

Первый шаг.

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 7 & 5 & 8 & - & \times \; 7 \\ & & & 6 & & \end{array}$$

Е числа 56; черта означает нуль, десятков нет.

Второй шаг.

0 7 5 8 - × 7
˙0 6

˙0 (10) есть Е числа 35 (5, умноженное на 7) плюс Д числа 56 (8, умноженное на 7).

Третий шаг.

0 7 5 8 - × 7
˙3 ˙0 6

˙3 (13) есть Е числа 49 (7, умноженное на 7) плюс Д числа 35 (5, умноженное на 7) «плюс» точка, стоящая у нуля.

Четвертый шаг.

0 7 5 8 - × 7
5 ˙3 ˙0 6

5 есть Д числа 49 (7, умноженное на 7) «плюс» точка, стоящая у ˙3; 0 (от 0, умноженного на 7) ничего не добавляет.

Окончательный ответ: 5 306.

В этом примере не раскрылась вся выгода метода «единиц и десятков». Мы легко могли бы решить задачу обычным умножением. Но так бывает только в простейших случаях. В большинстве случаев нам придется выполнять умножение с числами, которые не будут специально подобраны для облегчения нашей работы. Метод «единиц и десятков» предусматривает все виды задач.

В преимуществе данного метода мы убедимся, когда будем рассматривать умножение на большие множители, а не только на однозначные, вроде 6 или 7. Умножение на однозначное число является отличным упражнением, так как большой множитель состоит из отдельных цифр, и умножение на него сводится к расширению тех действий, которые мы сейчас рассматривали.

Между прочим, если вы вернетесь к только что решенному нами примеру и проследите, как разветвленная линия передвигается влево вдоль множимого, то поймете, откуда произошло название «метод двух пальцев». Каждый, впервые начинающий осваивать метод, может испытывать известные затруднения в фиксировании места, т. е. в запоминании, какую пару цифр он умножает и какая из них обозначает единицы. Чтобы следить за ходом решения задачи, он может показывать обе цифры пары указательным и средним пальцами левой руки. Назовем средний палец левой руки «пальцем единиц», а указательный палец — «пальцем десятков». Теперь мы можем всегда запоминать правильное место в вычислении, указывая этими пальцами на пару цифр. Средний палец заменяет букву Е, которую мы писали над числами, а указательный палец — букву Д. Если вы найдете, что прием вам помогает, непременно примените его. Но очень скоро вы убедитесь, что можете обойтись без всяких указателей, так как и без того знаете, где ведете вычисление.

С другой стороны, вы должны привить себе навыки писать решение аккуратно и чисто даже тогда, когда убеждены, что можете обойтись без помощи пальцев или кривых линий. Аккуратная и чистая работа — гарантия против ошибок, в особенности когда вычисление ведется на большой скорости.

Попробуйте решить один или несколько из этих примеров, фиксируя рабочее место любым удобным для вас способом:

1) 5 6 × 8;	3) 8 5 4 × 4;
2) 5 6 7 × 9;	4) 8 4 5 6 3 × 6.

Ответы: 1) 448; 2) 5103; 3) 3416; 4) 507 378.

Составьте самостоятельно несколько задач и решите их. Чем больше вы решите таких простых задач, тем быстрее и легче вы справитесь с более трудными видами умножений. Такие задачи с однозначными множителями являются основой метода быстрого умножения.

УМНОЖЕНИЕ НА ДВУЗНАЧНЫЕ ЧИСЛА

До сих пор мы умножали числа любой длины на отдельные цифры. Распространим теперь наш метод на двузначные множители.

Общая идея состоит в том, что теперь мы метод предыдущей главы присоединяем к методу, разработанному в данной главе. Аналогичный способ применяется и для произвольных множителей. Если вы вспомните, как мы работали с внешними и внутренними парами и как мы передвигались вдоль чисел, то заметите, что то же самое происходит и здесь. Разница состоит лишь в том, что сейчас мы используем также метод «единиц и десятков».

Рассмотрим задачу: 73 умножить на 54. В последней главе мы такого рода задачи решали с помощью внешних и внутренних пар. Мы не будем затруднять себя выполнением этого умножения методом предыдущей главы, но, сравнения ради, покажем, как цифры строятся в пары. Знак X указывает место цифры результата, получаемой на каждом шаге:

Первый шаг.

```
0 0 7 3   ×   5 4
      X
```

Ничего не делайте! Обратите внимание только на расположение кривых.

Второй шаг.

```
0 0 7 3   ×   5 4
    X
```

Третий шаг.

0 0 7 3 × 5 4
X

Четвертый шаг.

$\underline{0\ 0\ 7\ 3}$ × 5 4
X

Этот X *— последний перенос.*

Так мы решали в последней главе. Теперь сравните это со схемой усовершенствованного метода. Здесь мы также не будем решать задачу, а только проследим, как передвигаются линии, указывающие пары:

Первый шаг.

$\underline{0\ 0\ 7\ 3}$ - × 5 4
X

Линии, обозначенные пунктиром, понадобятся позже, но не в этом шаге.

Заметили ли вы, что цифра множимого, стоящая прямо над тем местом, где должна появиться следующая цифра, все еще часть внешней пары?

Второй шаг.

$\underline{0\ 0\ 7\ 3}$ - × 5 4

Тут начинает действовать метод «единиц и десятков». Каждая цифра множителя работает над двумя цифрами множимого. В этом примере цифра 4 из множителя действует над соседними цифрами 73 множимого для получения парного произведения. Сплошная соединительная линия указывает на цифру единиц, а пунктирная соединительная линия — на цифру десятков. Это означает, что мы берем единицы от числа 7, умноженного на 4, и десятки от числа 3, умноженного на 4:

Е Д
0 0 7 3 × 5 4
$2\underline{8}+\underline{1}2$

Прежде чем закончить вычисление, обратите внимание на то, что линии передвигаются вдоль множимого точно так же, как и в методе из предыдущей главы:

Третий шаг.

0 0 7 3 × 5 4

X

Цифра 4 от числа 54 соединена как с 0, так и с 7, цифра 5 соединена с 7 и 3.

Четвертый шаг.

0 0 7 3 × 5 4

X

Подчеркиваем еще раз, что в этом методе расположение линий имеет исключительное значение. В этом весь секрет получения правильного ответа. Все остальное — перемножать цифры и из их произведения брать единицы или десятки — просто. Кроме того, вы это уже освоили. При выполнении сложных умножений с длинными числами основная трудность состоит в том, чтобы подобрать две верные цифры для пары и перемножить их. Правильно подобранная в нужный момент пара даст вам очередную цифру ответа.

Цифра множимого, стоящая прямо над местом, где должен появиться ответ, как и в методе, описанном в предыдущей главе, является частью внешней пары, или, точнее, цифрой единиц внешней пары; цифрой десятков является цифра, стоящая непосредственно возле нее справа. Отсюда мы двигаемся дальше и устанавливаем цифры единиц и десятков для внутренней пары.

Для того чтобы найти очередную цифру ответа, вы, как это показано на приводимой схеме, должны начертить крайнюю левую линию (или, как всегда в дальнейшем, представить себе ее начерченной). Она будет прямо над очередной цифрой ответа, подлежащей вычислению.

Если вы рассмотрели схему и поняли, как по ней работать, то легко можете себе представить остальной порядок решения. Полностью задача выглядит следующим образом:

Первый шаг.

Е Д

0 0 7 3 × 5 4

2

Цифра единиц от 3, умноженных на 4, будет 2; другие линии ни с чем не соединяются.

Второй шаг.

$$\begin{array}{l} \quad\;\; \text{Е Д} \\ \qquad\;\; \text{Е Д} \\ \underline{0\;0\;7\;3}\;-\quad\times\quad 5\;4 \\ \qquad {}^{\cdot}4\;\;2 \end{array}$$

4 от числа 54 дает 2$\underline{8}$; плюс $\underline{1}$2, будет 9; 5 дает 1$\underline{5}$; плюс нуль, будет 5; сумма—14.

Возможно, если упростить чертеж, главное в приеме станет более ясным, вот так:

$$\begin{array}{ll} \text{Ответ:} & \qquad \text{Е Д} \\ \text{4 дает} & \qquad\quad\; \text{Е Д} \\ \text{5 дает,} & \underline{0\;0\;7\;3} \quad \times \quad 5\;4 \\ & \qquad {}^{\cdot}4\;\;2 \\ & \quad\; 2\underline{8}+\underline{1}2 \\ & \qquad\quad 1\underline{5}+0 \end{array}$$

Подчеркнутые единицы и десятки складываются: 8 плюс 1 плюс 5 плюс 0, будет 14.

Смысл схемы в том, что мы заставляем 4 от 54 работать над парой цифр 73:

$$\begin{array}{l} \text{Е Д} \\ 7\;\;3 \quad \times \quad 4 \end{array}$$

Затем мы заставляем 5 от 54 работать над парой 3 и пустым местом (обозначенным чертой):

$$\begin{array}{l} \text{Е Д} \\ 3\;- \quad \times \quad 5 \end{array}$$

По ранее примененному методу «единиц и десятков» 73×4 дает нам 9 (так как $2\underline{8}+\underline{1}2$ будет 9) и $3-\times 5$ дает 5 ($1\underline{5}$ плюс нуль). Сложив оба результата, $9+5=14$, мы пишем 4 и ставим точку вместо 1 от числа 14.

На практике все это должно проделываться в уме. Здесь мы всё пишем только для ясности. После того как мы некоторое время упражнялись в применении метода «единиц и десятков», все эти шаги легко будут делаться в уме. Вот почему несколькими страницами раньше мы говорили, что упражнения в выполнении умножения на одну цифру представляют собой неоценимую подготовительную ступень для усвоения метода в целом:

Третий шаг.

Ответ:
4 дает
5 дает

```
  Е Д
    Е Д
0 0 7 3  ×  5 4
---------
  9 ·4 2
---------
 0 + 28
     35 + 15
```

Сложив отмеченные единицы и десятки мы имеем 0 плюс 2 плюс 5 плюс 1, будет 8; да еще точка — в результате 9.

Четвертый шаг.

```
 Е Д
   Е Д
0 0 7 3   ×   5 4
-------
3 9 ·4 2
-------
```

4 дает 0 0
3 дает 0 $\underline{3}$ 5 *Когда мы умножаем на нуль, нам незачем писать результат в виде 00 — ясно, что это ничего не дает. 0 плюс 0 плюс 0 плюс 3, будет 3.*

Таким образом, ответ равен 3 942.

УМНОЖЕНИЕ МНОГОЗНАЧНОГО ЧИСЛА НА ДВУЗНАЧНЫЙ МНОЖИТЕЛЬ

Этот же способ дает нам возможность умножить число любой длины на двузначный множитель. Мы только что умножали 73 на 54. Предположим, мы хотим 5273 умножить на 54. Первые два шага прежние:

Первый шаг.

```
          Е Д
0 0 5 2 7 3   ×   5 4
-----------
          2
```

4 дает $\underline{1}2$ плюс 0.

Второй шаг.

```
        Е Д
          Е Д
0 0 5 2 7 3   ×   5 4
-----------
        ·4 2
```

4 дает 2$\underline{8}$ плюс $\underline{1}$2; 5 дает $\underline{1}$5 плюс 0; сложение подчеркнутых цифр дает 14.

Теперь мы таким же образом продолжаем дальше:

Третий шаг.

4 дает Е Д

5 дает Е Д

$\underline{0\ 0\ 5\ 2\ \ 7\ \ 3}\ \times\ 5\ 4$

$\underline{\cdot 7\ \ \cdot 4\ \ 2}$

$0\underline{8}+\underline{2}8$

$3\underline{5}+\underline{1}5$ *Сложение подчеркнутых цифр дает 16, плюс единица, будет 17.*

Четвертый шаг.

4 дает Е Д

5 дает Е Д

$\underline{0\ 0\ 5\ \ 2\ \ 7\ 3}\ \times\ 5\ 4$

$\underline{4\ \ \cdot 7\ \ \cdot 4\ 2}$

$2\underline{0}+\underline{0}8$

$1\underline{0}+\underline{3}5$ *Сложение подчеркнутых цифр дает 3, точка от числа 17 увеличивает ее до 4.*

Пятый шаг.

Е Д

Е Д

$\underline{0\ 0\ 5\ 2\ 7\ 3}\ \times\ 5\ 4$

$8\ 4\cdot 7\ 4\ 2$ *Проделайте это самостоятельно.*

Последний шаг.

Е Д

Е Д

$\underline{0\ \ 0\ \ 5\ 2\ 7\ 3}\ \times\ 5\ 4$

$\underline{2\ \ 8\ \ 4\cdot 7\ 4\ 2}$

$\underline{0}+0$

$0+\underline{2}5$

Ответ: **284 742.**

На практике мы безусловно не будем при каждом шаге опять выписывать все цифры — достаточно один раз! Никаких «рабочих» цифр мы также писать не будем. Это все легко может быть проделано в уме. Вычисление идет быстро и легко, если мы проделали упражнения с парными произведениями. Глядя на 73, умноженное на 4 от, скажем, 54, мы должны почти сразу же говорить «9». После того как мы проделали нужное количество упражнений, представить себе 28 плюс 12 не потребует никакого умственного напряжения. Как мы уже ранее указывали, на деле это становится полуавтоматическим действием в уме, не требующим концентрации всего внимания.

ТРЕХЗНАЧНЫЕ МНОЖИТЕЛИ

При выполнении умножения числа любой длины на трехзначный множитель, как например 273 на 154, или 5273 на 154, или 235 273 на 154, применяются те же основные общие принципы. Однако теперь каждая цифра ответа является суммой трех частей. Ранее это была сумма двух частей. Как мы увидим, каждая из этих трех частей получается от другой пары цифр путем применения обычного метода «единиц и десятков». Рассмотрим пример: 273 умножить на 154. Напишем впереди 3 нуля (154 состоит из трех цифр).

Первый шаг.

Е Д

0 0 0 2 7 3 × 1 5 4

2

4 от числа 154 дает $1\underline{2}+0$

У 5 и 1 от 154 нет пары, поэтому они для ответа ничего не дают.

Второй шаг.

4 дает
5 дает

Е Д
Е Д
Е Д

0 0 0 2 7 3 × 1 5 4

4 2

$2\underline{8}+\underline{1}2=9$

$1\underline{5}+\underline{0}=5$

1 ничего не дает, так как она не имеет пары.

Если вы это сравните с предыдущим примером, то увидите, что до сих пор мы действовали аналогично. Это происходит потому, что 1 от числа 154 пока в ответ ничего не внесла, так как она пока еще ни с какой частью числа 273 не образовала пары. Но теперь пойдем дальше.

Третий шаг.

4 дает Е Д

5 дает Е Д

1 дает Е Д

$$\underline{0\ 0\ 0\ 2\ 7\ 3} \quad \times \quad 1\ 5\ 4$$

$$\underline{{}^{\cdot\cdot}0\ {}^{\cdot}4\ 2}$$

$$0\underline{8}+\underline{2}8$$

$$3\underline{5}+\underline{1}5$$

$$0\underline{3}+\underline{0}$$

Сложение подчеркнутых цифр дает 19; плюс точка — 20.

Четвертый шаг.

Е Д

Е Д

Е Д

$$\underline{0\ 0\ 0\ 2\ 7\ 3} \quad \times \quad 1\ 5\ 4$$

$$\underline{{}^{\cdot}2\ {}^{\cdot\cdot}0\ {}^{\cdot}4\ 2}$$

Цифра 4 еще участвует в действии — она дает цифру десятков от числа 2, умноженного на 4. Но она дает нуль, так как 2, умноженное на 4, будет 08. Реальный взнос мы получаем только от цифр 5 (10 плюс $\underline{3}5$) и от 1 ($0\underline{7} + \underline{0}3$).

Пятый шаг.

4 дает Е Д

5 дает Е Д

1 дает Е Д

$$\underline{0\ 0\ 0\ 2\ 7\ 3} \quad \times \quad 1\ 5\ 4$$

$$\underline{4\ {}^{\cdot}2\ {}^{\cdot\cdot}0\ {}^{\cdot}4\ 2}$$

$$0+0$$

$$0+\underline{1}0$$

$$0\underline{2}+\underline{0}7$$

4 больше не участвует, Е и Д падают только на нули.

Последний шаг.

Е Д

$$\underline{0\ 0\ 0\ 2\ 7\ 3} \quad \times \quad 1\ 5\ 4$$

$$0\ 4\ 2 \cdot 0\ 4\ 2$$

Ответ: 42 042.

Из этого примера ясно видно, как мы поступаем в том случае, когда множитель состоит из четырех или любого большего количества цифр.

Мы рассмотрели множители возрастающей величины, сначала однозначные, затем двузначные и трехзначные, и это естественно привело к некоторым повторениям. Мы шли на них сознательно, стремясь к ясности и возможности постепенного и прочного усвоения. Все упражнения, необходимые для основательного овладения методом в целом, потребуют всего лишь нескольких часов. В результате мы научимся быстро умножать новым и надежным способом.

Степень достигнутой скорости зависит от объема практических упражнений. При достаточном их количестве можно добиться исключительной скорости.

РЕЗЮМЕ

В двух словах, метод «двух пальцев» характеризуется следующими тремя основными чертами:

1. Образование парного произведения — таким же образом, как здесь парное произведение 7 образовано от 53, умноженного на 7:

$$\begin{array}{cc} \text{Е} & \text{Д} \\ 5 & 3 \\ \hline 3\underline{5} & \overline{2}1 \\ 5 & +2 \end{array}$$

7 *Парное произведение.*

2. Умножение любого числа на одиночную цифру с помощью парных произведений:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \text{Е} & \text{Д} & & \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 3 & \times & 7 \\ \hline & & & & 1 & & \end{array}$$

Единицы от числа 3, умноженного на 7 (т. е. 21): 1.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \text{Е} & \text{Д} & & \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 3 & \times & 7 \\ \hline & & & 7 & 1 & & \end{array}$$

7 есть парное произведение от 53, умноженного на 7.

Окончательно:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Е} & \text{Д} & & & & & \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 3 & \times & 7 \\ \hline 2 & 2 & 7 & 7 & 1 & & \end{array}$$

3. Этот вид умножения на одиночную цифру можно распространить на умножение на число любой длины. С этой целью составляется несколько парных произведений, которые складываются

для получения каждой цифры ответа. Эти несколько парных произведений служат внутренними и внешними парами, которые мы берем, двигаясь от концов внутрь, в пространство между перемножаемыми числами:

$$\begin{array}{l}
\qquad\quad\ \text{ЕД} \\
\qquad\quad\ \ \ \text{ЕД} \\
\underline{0\ 0\ 7\ 3}\quad \times \quad 5\ 4, \\
\qquad\ \ \ 2
\end{array}$$

затем

$$\begin{array}{l}
\quad\ \ \text{Е Д} \\
\qquad\ \text{Е Д} \\
\underline{0\ 0\ 7\ 3}\quad \times \quad 5\ 4 \\
\qquad\ \cdot 4\ 2
\end{array}$$

Эти 14 есть 8 плюс 1 плюс 5 от 28, 12, 15.

и так далее до конца:

$$\begin{array}{l}
\text{Е Д} \\
\ \ \text{Е Д} \\
0\ 0\ 7\ 3\quad \times \quad 5\ 4 \\
\hline
3\ 9\ \cdot 4\ 2
\end{array}$$

Помните о том, что самая левая Е в каждой задаче ставится прямо над местом, где должна появиться очередная цифра ответа.

УПРАЖНЕНИЯ

Назовите вслух парные произведения следующих пар чисел:

1) 67×8; 3) 94×2; 5) 66×7;
2) 56×4; 4) 77×6; 6) 59×7.

Выполните следующие умножения на одиночную цифру, используя парные произведения (одно для каждой цифры ответа):

7) 56×4; 8) 82×8; 9) 3945×6.

Выполните следующие умножения, используя и парные произведения, и внутренние и внешние пары (два произведения для каждой цифры ответа):

10) 95×62; 12) 83×45; 14) $43\,546 \times 62$.
11) 38×66; 13) $3\,456 \times 86$;

Ответы: 1) 13; 2); 3) 8; 4) 6; 5) 6; 6) 11; 7) 224; 8) 656; 9) 23 670; 10) 5 890; 11) 2 508; 12) 3 735; 13) 297 216; 14) 2 699 852.

Глава четвертая

СЛОЖЕНИЕ. ПРАВИЛЬНОСТЬ ОТВЕТА

В предыдущих главах мы разобрали методы умножения, делая упор на быстроту решения. Одновременно мы обращали внимание на необходимость быть аккуратными и подчеркивали значение проверки наших ответов.

В сложении мы также имеем дело с этими двумя факторами: скоростью и аккуратностью. В данной главе мы разберем метод сложения, которым пользуется большинство людей, опишем метод проверки и двойной проверки результатов.

Мы научимся проверять вычисление по отдельным столбцам, не повторяя всего сложения. Это имеет несколько преимуществ:

1) мы экономим время, не повторяя все вычисление;

2) мы находим ошибку, если таковая имеется, в той колонке, где она допущена, что облегчает ее исправление;

3) мы гарантированы, что обнаружим ошибку, что не всегда удается при повторении всего вычисления.

Последний пункт многим кажется не особенно убедительным. Вспомните, однако, что каждый из нас имеет свои слабости и свойственные ему ошибки. Например, человек, в общем-то вполне грамотный, может написать «исскуство» вместо «искусство», другой упорно пишет «гостинница» (с двумя «н»). То же происходит с арифметикой, хотя большинство из нас этого и не сознает. Один, например, может иметь болезненную склонность считать, что 8×7 равно 54. Если вы его прямо спросите, он ответит «56», но в процессе длинного вычисления у него обязательно вкрадется «54». У других свои выверты. Это одна из причин, почему повторение вычисления — слабый способ проверки. Если ошибка, которую вычислитель сделал вначале, есть характерная для него ошибка, то он, вероятнее всего, снова ее сделает при проверке путем простого повторения вычисления.

В то же время «естественные» ошибки тоже могут нас подвести, когда мы для проверки нашей работы привлечем кого-либо другого. Мы имеем в виду ошибки, появление которых естественно для каждого в одинаковой ситуации. Скажем, человек пишет цифру 4 наподобие печатной с соединяющимися в вершине линиями, и при быстром письме вершина может закруглиться и получится нечто похожее на 9. И любой другой человек, проверяя вычисление, примет 4 за 9, так же как первый, допустивший ошибку. Бесчисленные естественные ошибки приключаются в различных ситуациях: вторичное выполнение уже раз выполненного действия, описки и множество других. Впрочем, эти естественные ошибки, присущие каждому человеку, менее важны, чем специфические, только нам свойственные ошибки, по той простой причине, что редко когда можно найти кого-нибудь, кто проверит нам нашу работу.

Так или иначе любой способ проверки счета лучше простого повторения вычисления.

НАХОЖДЕНИЕ СУММЫ

Как и при обычном сложении, мы пишем слагаемые одно под другим в столбик и под самым нижним проводим черту. Сумма будет под чертой. Как и обычно, мы записываем одинаковые разряды под одинаковыми:

$$\begin{array}{r} 12{,}5 \\ 271{,}65 \\ 3{,}01 \\ \hline \end{array}$$

или

$$\begin{array}{rrrr} 3 & 6 & 8 & 9 \\ & 7 & 5 & 8 \\ 9 & 6 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 9 & 8 \\ & 7 & 4 & 5 \\ 9 & 9 & 6 & 8 \\ 5 & 8 & 8 & 7 \\ 9 & 9 & 8 & 8 \\ 7 & 6 & 1 & 5 \\ 8 & 7 & 4 & 9 \\ \hline \end{array}$$

При обычном методе сложения мы теперь складываем цифры правого столбца: 9 плюс 8 плюс 7 и т. д. Если мы захотим, то можем так сделать и по новому методу, но это не обязательно. Можно начать счет с любой колонки. Новизны ради начнем с левой колонки. Складываем сверху вниз, применяя при этом правило Трахтенберга:

Всегда ведите счет только до одиннадцати.

Это означает, что если промежуточная сумма становится больше 11, мы ее уменьшаем на 11 и продолжаем счет с уменьшенным числом. При этом мы делаем маленькую пометку, или контрольный значок, возле числа, у которого промежуточная сумма стала больше 11. В примере мы начинаем с левой колонки сверху вниз и производим в уме следующие вычисления:

3

9′ $3+9=12$: *Это больше 11, поэтому мы вычитаем 11 из 13. Делаем пометку и начинаем сложение снова с единицы.*

1 $1+1=2$

6 $2+6=8$

9′ $8+9=17$: *Делаем пометку и вычитаем 11 из 17; говорим «6» и продолжаем.*

5′ $6+5=11$: *Делаем пометку, говорим «0» и продолжаем.*

9

7′ $9+7=16$: *Делаем пометку, говорим «5» и продолжаем.*

8′ $5+8=13$: *Делаем пометку и пишем 2.*

Последняя цифра 2 пишется под столбцом в качестве «промежуточной суммы». Далее мы подсчитываем пометки, которые мы сделали, когда вычитали 11. Сколько их было в примере? 5. Поэтому мы под столбиком пишем 5 как «цифру пометок».

Теперь пример выглядит так:

```
            3 6 8 9
              7 5 8
            9′6 6 7
            1 0 6 4
            6 4 9 8
              7 4 5
            9′9 6 8
            5′8 8 7
            9 9 8 8
            7′6 1 5
            8′7 4 9
            -------
Промежуточная сумма:   2
Пометки:               5
```

Искомый ответ будет получен от промежуточной суммы и количества пометок. Но сперва мы должны то же самое проделать с остальными колонками. Получаем:

```
            3 6 8 9
              7′5′8′
            9′6 6 7′
            1 0 6′4
              7 4 5
            9′9′6′8′
            5′8′8 7′
            9 9′8′8
            7′6 1 5′
            8′7′4 9′
            ---------
Промежуточная сумма:   2 3 1 0 1
Пометки:               5 6 5 7
```

Теперь мы подходим к окончательному ответу, сложив промежуточную сумму с пометками таким путем: мы прибавляем соседа справа в нижней строке пометок. Вот так:

```
— 3 — —
— 6 5 —
———————
1 4        3 плюс 6 плюс 5
```

В примере мы имеем:

```
Промежуточная сумма:  0 2 3 1 0 1
Пометки:              0 5 6   5 7
                      ———————————
                                8   1 + 7 = 8
                             ··2    10 + 5 + 7 = 22
                           ·6       3 + 6 + 5 + перенос = 16
                         ·4         2 + 5 + 6 + перенос = 14
                        6           0 + 0 + 5 + перенос = 6
```

Это прибавление нижнего соседа справа является характерным приемом нашего метода.

На практике полный ответ выглядит так:

```
 Столбец чисел
 —————————————
  0 2 3 1 0 1
  0 5 6   5 7
 —————————————
  6·4·6 ··2 8
```

Складывая эти две строки, мы начинаем справа и двигаемся влево, как при обычном сложении. При последнем шаге мы должны представить себе два нуля, один над другим, как это здесь показано, если в действительности их не написали. Это нужно для того, чтобы не забыть, что еще что-то осталось приплюсовать, а именно левую цифру из строки пометок (в данном случае — 5). Дело в том, что мы складываем не обычным путем, а «в виде L». В последнем шаге мы рассматриваем следующие цифры:

```
0
0 ·5
————
0  6     5 плюс перенос будет 6.
```

Этого способа следует придерживаться во всех случаях.

Применяя «правило одиннадцати», вы увидите, что, складывая цифры колонки, мы никогда не превышаем числа 19, что делает сложение более легким. Когда мы перешагнули 11, первая, или левая, крайняя цифра всегда будет 1. Следовательно, когда мы «вычитаем 11», в действительности нам ничего не приходится вычитать; достаточно забыть про первую цифру и уменьшить вторую на 1. Если, скажем, имеем 16, то думаем только о цифре 6 и уменьшаем ее до 5. Так, число 16 «становится» цифрой 5, когда мы делаем нашу пометку. При решении на практике от умения действовать таким образом зависит, сделаете ли вы вашу работу в два раза более легкой или в два раза более трудной.

Пример 1.

5 4 7 7
9 6 6 5
2 7 4 6
8 3 5 6
7 4 9 9
5 1 6 2
6 8 7 5

Промежуточная сумма:	9 0 0 7
Пометки:	3 3 4 3
Сумма:	4'5 7 8'0

Пример 2.

1 6, 3 9
5 0 7, 2 6
1 9 5, 0 0
7 8, 3 7
6 4, 2 7
4, 7 5
8 8, 4 7
2 8 6, 5 5

Промежуточная сумма:	8 6 4, 4 2
Пометки:	0 3 4, 2 4
	1 '2 '4 '1, '0 6

Вот еще несколько задач (подобные им вы можете легко составить самостоятельно).

Задача 1.

4 6 9
7 4 2
3 2 5
9 6 2
5 2 7
6 2 3
2 1 3

Задача 2.

61598
50423
7246
744
42
9357
21

Задача 3.

1,25
3,06
7,58
0,98
38,50
59,50
9,75
2,98
12,25
14,85
45,00
25,75

Задача 4.

166,15
35,94
34,13
705,75
422,50
2,99
16,77
522,35
875,88
27,66
55,18
149,75

Ответы (получены путем применения к промежуточным суммам и числам пометок способа сложения «в форме L»):

1)

0 3 1 9
0 3 2 2
3 8 6 ·1

3)

0 5 0 4 0
0 1 5 5 5
2 ·2 ·1 ·4 5

2)

0 0 6 1 0 8 9
0 1 1   1 2 2
1 2 9   ·4 ·3 ·1

4)

0 4 2 3 9 1 0
0 2 3 5 5   5
3 ·0 ·1 ·5   ··0 ·5

Следует заметить, что и раньше был известен способ, похожий на наше «правило одиннадцати». Когда промежуточная сумма была больше 10, вычитали 10 и делали пометку. Это тоже неплохая идея, но мы все же предпочитаем «правило одиннадцати», так как оно позволяет применить затем специальный прием проверки и двойной проверки, который мы детально разберем ниже.

ПРОВЕРКА ОТВЕТА

Чтобы в нескольких словах резюмировать то, что мы проделали, рассмотрим еще раз один из наших примеров. Но теперь мы большинство цифр обозначим точками:

Столбец чисел:	3 6 8 9
	. . . .
	. . . .
	8 7 4 9
	2 3 10 1
Рабочая схема:	5 6 5 7
Ответ:	6 4 6 2 8

Коротко говоря, мы использовали столбец чисел, чтобы составить рабочую схему, и использовали рабочую схему, чтобы найти ответ. Как видите, рабочая схема состоит из промежуточных сумм и чисел пометок, которыми мы пользовались в каждом примере.

Для проверки правильности мы используем все три части схемы: столбец чисел, рабочую схему и ответ. Из каждого мы вычисляем одну контрольную цифру и эти контрольные цифры сравниваем между собой, чтобы посмотреть, совпадают ли они. Если да, то решение правильное. Если они не совпадают, то где-то ошибка. Причем с помощью этого способа проверки быстро выясняется, где именно (в каком столбце допущена) ошибка.

Проверка состоит из трех шагов.

П е р в ы й ш а г. Найти контрольную цифру для каждого столбца цифр.

В т о р о й ш а г. Найти контрольную цифру для рабочей схемы.

Т р е т и й ш а г. Найти контрольную цифру для ответа (суммы).

П е р в ы й ш а г. Берем поочередно каждый столбец и находим «девятые остатки». Это то же, что сокращенная (или приведенная) сумма цифр, о которой мы говорили на странице 64. Чтобы найти «девятые остатки», мы вычеркиваем (или подчеркиваем) 9, а также все комбинации цифр, которые в сумме дают 9 или число, кратное 9, а затем складываем только то, что осталось. Если получится двузначное число, мы приведем его к одиночной цифре, сложив обе цифры. Полученная цифра и является контрольной для данного столбца. Найдем, например, контрольную цифру для левого столбца цифр одного из рассмотренных ранее примеров:

$$
\begin{array}{r}
\cancel{3}689\\
758\\
\cancel{9}667\\
\cancel{1}064\\
\cancel{6}498\\
745\\
\cancel{9}968\\
5887\\
\cancel{9}988\\
7615\\
\underline{\cancel{8}749}\\
12\\
3
\end{array}
$$

С остальными тремя столбцами поступаем так же. Если вы заметите в столбце три цифры, дающие в сумме 9, вычеркивайте все три. Но если бы вы даже проглядели такую группу из трех цифр, вреда не будет. Верно то, что вы всегда получите ту же конечную одиночную цифру путем последовательного сложения, как это было с 1 и 2 от 12, совершенно независимо от того, сколько возможностей для вычеркивания вы упустили.

Попробуйте остальные три колонки обработать самостоятельно. Когда вы закончите, ответ должен будет выглядеть так (отбрасываемые цифры не перечеркнуты, а подчеркнуты):

$$
\begin{array}{cccc}
\underline{3} & \underline{6} & \underline{8} & \underline{9}\\
 & 7' & \underline{5'} & 8'\\
\underline{9'} & \underline{6} & \underline{6} & 7'\\
\underline{1} & \underline{0} & \underline{6'} & \underline{4}\\
\underline{6} & 4' & \underline{9'} & 8'\\
 & 7 & \underline{4} & \underline{5}\\
\underline{9'} & \underline{9'} & \underline{6'} & 8'\\
5' & 8' & 8 & 7\\
\underline{9} & 9' & 8' & 8\\
7' & \underline{6} & \underline{1} & 5'\\
\underline{\underline{8'}} & \underline{\underline{7'}} & \underline{\underline{4}} & \underline{\underline{9'}}
\end{array}
$$

Промежуточная сумма:		2	3	10	1
Пометки:		5	6	5	7
Сумма:	6	4	6	2	8
Проверка (девятые остатки):		3	6	2	6

Приведение к одиночной цифре не обязательно оставлять на конец. Проще делать это по ходу сложения сразу же (хотя это и не столь существенно).

Второй шаг. Цель этого шага состоит в том, чтобы проверить рабочую схему, которая в примере выглядела так:

Промежуточная сумма:	2	3	10	1
Пометки:	5	6	5	7

Мы находим контрольные цифры для этой схемы путем повторения второй строки и сложения:

Промежуточная сумма:	2	3	10	1
Пометки:	5	6	5	7
Повторение пометок:	5	6	5	7
Сложение дает:	12	15	20	15
Окончательно:	3	6	2	6

Сравните эти последние цифры с теми, что мы нашли в первом шаге. Мы нашли четыре однозначных числа: 3, 6, 2, 6, относящиеся к четырем столбцам. Во втором шаге мы также нашли четыре однозначных числа: 3, 6, 2, 6. Они точно соответствуют контрольным цифрам из первого шага; значит, решение правильно.

Предположим, случилось так, что не все контрольные цифры совпадают. Например, первый шаг дал бы 3, 6, 7, 6, а второй — 3, 6, 2, 6. Третьи цифры слева не совпадают. Значит, третья колонка слева сложена неправильно, но другие три колонки сложены правильно[1]. Ошибку можно найти, проверив одну третью колонку.

Третий шаг. Этот шаг дает контрольную цифру для ответа. В нашем примере сумма равна 64 628. Контрольная цифра равна сумме цифр этого числа: 6 плюс 4 плюс 6 плюс 2 плюс 8, будет 26, что приводится к 8. С чем это нам сравнить для проверки? Мы сравниваем это с двумя группами однозначных чисел, которые мы нашли в первом и втором шагах: с цифрами 3, 6, 2, 6.

[1] Разумеется, доказать можно только первую часть утверждения; вторая же, при всей своей правдоподобности (и даже практической надежности), может оказаться ошибочной. В дальнейшем, впрочем, мы не будем всякий раз оговаривать подобные авторские вольности, предлагая читателю внимательно различать практические советы авторов, с одной стороны, и теоремы—с другой. — *Прим. ред.*

Если мы их сложим, мы получим 17, что опять-таки сводится к 8. Сумма 64 628 также дает сумму цифр, которая приводится к 8. Все результаты совпадают, следовательно, все правильно.

Этот способ применим к любому виду сложения. На практике мы, конечно, не будем выписывать всех чисел,как это показано выше при разборе. В особенности при проверке рабочей схемы нет необходимости переписывать ее и повторять нижнюю строку. Повторение нижней строки может быть произведено в уме простым прибавлением нижних цифр дважды. Так, на практике разобранный для иллюстрации метода пример выглядел бы так:

$$
\begin{array}{cccc}
3 & 6 & 8 & 9 \\
 & 7' & 5' & 8' \\
9' & 6 & 6 & 7' \\
1 & 0 & 6' & 4 \\
6 & 4' & 9' & 8' \\
 & 7 & 4 & 5 \\
9' & 9' & 6' & 8' \\
5' & 8' & 8 & 7' \\
9 & 9' & 8' & 8 \\
7' & 6 & 1 & 5' \\
8' & 7' & 4 & 9' \\
\hline\hline
\end{array}
$$

Промежуточная сумма:	2 3 10 1
Пометки:	5 6 5 7
Ответ:	6 4 6 2 8

Проверка. Столбцы: 3 6 2 6 («девятые остатки» столбцов)
Рабочая схема: 3 6 2 6 = 8
Ответ: 6 4 6 2 8 = 8

В практической работе мы, конечно, не произносили всех этих слов и пользуемся только цифрами. Когда вы производите сложение, вы ведь знаете,что строка 2, 3, 10, 1 представляет промежуточные суммы и т. д. (Здесь мы обозначали их только во избежание недоразумений.)

Вот другой пример, составленный немного по-другому, но который вам, может, больше понравится. Разница состоит в том, что строка пометок из рабочей схемы написана, но сама схема не показана: строку с пометками мы повторяем под ответом. Затем мы складываем три строки увеличенной рабочей схемы, перескочив через ответ:

	.8 9	
	.2 3′	
	.9′ 6	
	1.0 4′	
	.3′ 9	
	.2 5′	
Промежуточная сумма:	1.2 3	
Пометки:	0.2 3	
Сумма:	3.7 6	*Ответ равен 3,76.*
Повторение отметок:	0.2 3	
Контрольные цифры:	1.6 9	
«Девятые остатки» столбцов:	1.6 0	

Проверка, разумеется, сошлась: ведь с точки зрения «девятых остатков» 9 и 0 равноценны. 1,69 получилось в результате сложения трех стоящих друг под другом цифр: 1 плюс 0 дало 1; 2 плюс 2 плюс 2 дало 6 и 3 плюс 3 плюс 3 дало 9.

Заключительная часть проверки: мы проверяем ответ (3,76), находя его сокращенную сумму цифр. Она равна 7. Сумма цифр числа 1,69 тоже 7; значит, и здесь сошлось. Ошибок нет.

ОБЩИЙ МЕТОД ПРОВЕРКИ

В любых видах вычислений очень важно располагать другим способом проверки, кроме их повторения. Складываем ли мы, вычитаем, делим, возводим число в квадрат, извлекаем квадратный корень или комбинируем эти действия, нам всегда необходим хороший метод проверки. Такой метод имеется, и он применим ко всем видам вычислений.

Существует два таких метода: разница между ними небольшая, но ради большей полноты, мы разберем оба.

Метод «суммы цифр»

Этот метод может быть также назван методом «девятых остатков». Это старая идея, перенятая системой Трахтенберга. Мы уже рассматривали этот метод как часть проверки сложения. Напомним еще раз сущность метода:

1) Находим сумму цифр числа, складывая все его цифры.

2) Приводим сумму цифр к одиночной цифре.

3) Складывая цифры числа, мы по ходу дела отбрасываем все девятки. Если вы заметите две цифры, которые в сумме дают 9 (например, 1 и 8), не принимайте их во внимание. С одного взгляда видно, что сумма цифр числа 9 099 991 есть 1. Незачем утруждаться и складывать девятки. (Но если даже это и сделать, все равно в конечном счете получится 1.)

4) Так как при этом способе девятки в счет не идут, как мы видели в пункте 3, то сумма цифр 9 равна сумме цифр 0. Сумма цифр числа 513, например, есть нуль. Если вы это запомните, то в определенных случаях сократите себе работу.

Какова, например, сумма цифр числа 918 273 645? Ответ получается моментально: нуль. Ведь мы можем пропускать 9 и пары цифр, дающие в сумме 9. В этом примере после первой девятки каждая пара стоящих рядом цифр дает в сумме 9. Все отбрасывается, и мы получаем нуль.

Какова сумма цифр числа 234 162? (Совет: пропускайте те три цифры, сумма которых дает 9.) И снова мы получили нуль.

Обычно, разумеется, мы имеем дело с числами, не все цифры которых дают в сумме 9. Но каков бы ни был результат сложения, после приведения к одиночной цифре он и дает сумму цифр. Так, сумма цифр числа 903 617 есть 8: 9 и нуль пропускаются, $3+6=9$, и у нас остается 1 плюс 7, т. е. 8.

Еще одно упрощение, как мы видели, достигается тем, что, как только при сложении цифр какого-нибудь числа ее промежуточная сумма становится двузначной, обе цифры складываются и полученная одиночная цифра принимается за новую промежуточную сумму, после чего идут дальше. Например: найти сумму цифр числа 7 288 476 568. Говорите: 7 плюс 2 равно 9; «забываем» эту девятку. Затем 8 плюс 8 равно 16, двузначное число. Приводим 16 к одиночной цифре: 1 плюс 6 равно 7. С этой семеркой продолжаем: 7 плюс 4 равно 11; две цифры приводим к одиночной цифре: 1 плюс 1 равно 2. Продолжаем: 2 плюс 7 равно 9, это опять 0, и мы начинаем счет снова, 6 плюс 5 равно 11, т. е. 2, а 2 плюс 6 равно 8; затем следует 8 плюс 8 равно 16, т. е. 7. Итак, сумма цифр этого длинного числа равна 7.

Метод этот основывается на том, что вычисляемые нами сокращенные суммы цифр суть не что иное, как остатки, которые мы бы получили при делении каждого числа на 9. Возьмем, например, 32. Разделим на 9 : 9, умноженное на 3, будет 27, и в остатке мы имеем 5. Возьмем длинное число, скажем 821, и разделим его на 9; мы получим частное 31 и в остатке 2. Как вы несомненно заметили, в первом случае сумма цифр числа 32 есть 5, равная остатку 5. Во втором случае сумма цифр числа 281 равна 11, что приводится к 2. В каждом случае наша сумма цифр, после того как она приведена к одиночной цифре, равна остатку от деления числа на 9. (Доказательство в общем случае читатель легко проведет сам, во всяком случае после прочтения последней главы книги.) То же относится и к доказательствам излагаемых ниже правил проверки.

Как мы можем использовать суммы цифр для проверки? Казалось бы, в разных случаях по-разному, но на самом же деле необходимо запомнить только одно основное правило. *Все, что вы делаете с числами, вы должны делать и с суммами их* *цифр. Тогда результат, который вы получите от сумм цифр этих чисел, должен быть равен сумме цифр ответа.*

Пусть, например, мы умножим 92 на 12. Произведение будет 1104.

Мы можем написать решение в параллельных строках:

Числа: $92 \times 12 = 1104$
Суммы цифр: $2 \times 3 = 6$
$(1+1) \quad (1+2) \quad (1+1+0+4)$

После сказанного пояснения излишни.

Метод также хорошо действует и в применении к сложению:

Числа: $15 + 12 + 20 = 47$
Суммы цифр: $6 + 3 + 2 = 11 \; (4 + 7 = 11)$
После приведения к одиночной цифре: $2 = 2$.

В первом примере мы у м н о ж а л и данные числа (92 на 12), значит, мы должны были умножать и суммы цифр (2 на 3). Во втором примере дело обстояло иначе — мы с к л а д ы в а л и данные числа (15 плюс 12 плюс 20), значит, мы должны были также сложить и суммы цифр (6 плюс 3 плюс 2). Мы всегда выполняем параллельное вычисление, беря суммы цифр вместо чисел.

Разумеется, данные числа часто будут очень большими, иногда миллионными. Их суммы цифр всегда будут малыми, так как они приводятся к одиночной цифре. Таким образом, эта проверка требует лишь небольшого объема вычислений, но дает нам полноценный метод контроля.

Проверьте следующее двойное умножение:

$$322 \times 28{,}1 \times 12{,}4 = 112\,197{,}68$$

При проверке не обращайте внимания на запятые. Слева от знака равенства мы имеем следующие суммы цифр:

$7 \times 2 \times 7$
(14) *В уме — не пишите.*
(5×7) *В уме — не пишите.*
(35) *Тоже в уме!*
8 *Сумма цифр.*

С правой стороны равенства мы имеем ответ: 112 197,68. Сумма его цифр будет 8. Итак, 8 равно 8, решение правильно.

В простых случаях деления проверка производится таким же путем.

Вот пример:
Числа: $132 : 11 = 12$
Суммы цифр: $6 : 2 = 3$

Итак, сумма цифр ответа 3 (1 плюс 2), и от деления 6 на 2 мы тоже получили 3. Значит, все верно. Но чаще деление оказывается немного более сложным из-за наличия остатка. Позже, в главе о делении, мы на этом остановимся подробнее. А пока достаточно будет запомнить, что *деление может быть проверено путем умножения соответствующих сумм цифр.*

Например, мы можем в указанном выше примере сумму цифр частного умножить на сумму цифр делителя, это будет 3, умноженное на 2. Мы получаем 6 — сумму цифр делимого, и проверка показывает, что результат верен.

Метод «одиннадцатых остатков»

Мы можем использовать этот метод либо вместо метода «суммы цифр», либо, если потребуется, для двойной проверки, либо просто ради разнообразия. Можно назвать этот метод методом «одиннадцатых остатков». Но мы ничего на 11 не делим. Обычная сумма цифр есть остаток, полученный после деления на 9. Сейчас мы находим остаток, который получается после деления на 11, причем способом, похожим на применямый для суммы цифр. Вот он, этот метод:

Первый случай: двузначные числа.

Для того чтобы найти «одиннадцатый остаток» двузначного числа, скажем 48, мы из цифры единиц вычитаем цифру десятков. При 48 мы имеем $8 - 4 = 4$. «Одиннадцатый остаток» числа 48 есть 4. То же мы нашли бы, если бы действительно разделили 48 на 11.

Иногда мы не можем произвести вычитание потому, что цифра десятков больше цифры единиц, например у числа 86. В таком случае мы увеличиваем цифру единиц, прибавив к ней 11. Для 86 мы получаем 6 плюс 11, т. е. 17, минус 8, получается 9. Для 52 «одиннадцатый остаток» будет 2 минус 5; 2 плюс 11 минус 5, будет 8.

Второй случай: многозначные числа.

Здесь используется каждая вторая цифра. Это означает, что мы начинаем с правого края числа и, двигаясь влево, складываем каждую вторую цифру, затем берем пропущенные цифры, складываем их и вычитаем из первой суммы. Возьмем, скажем, число 943 021 758. Начнем справа с цифры 8 и, двигаясь влево, сложим все цифры через одну:

$$8 + 7 + 2 + 3 + 9 = 29$$

Вернувшись назад к предпоследней цифре длинного числа, к 5, опять сложим цифры через одну:

$$5 + 1 + 0 + 4 = 10$$

Затем вычтем:

$$29 - 10 = 19$$

Эти «19» нужно сократить точно так же, как мы ранее сокращали наши суммы цифр, приводя их к одиночной цифре. В данном методе мы это делаем вычитанием цифры десятков из цифры единиц (т. е. находим «одиннадцатый остаток» этого двузначного числа, числа, как в первом случае):

$$9 - 1 = 8$$

В этом примере у нас было 29 минус 10. А если бы было, скажем, 29 минус 35, и вычитание невозможно? Чтобы мы тогда делали? Мы бы к меньшему числу прибавили 11, чтобы сделать вычитание возможным. Здесь 29 минус 35 превратилось бы в 40 минус 35, равно 5.

Не кажутся ли 29 и 35 чрезмерно большими числами? Вы легко можете их избежать, если произведете небольшие сокращения. Вот одно, уже знакомое нам: после того как вы нашли первое число (в нашем примере 29), вы можете еще до нахождения второго (35) начать вычитать из него слагаемые этой второй суммы (а если в какой-либо момент вычитание окажется невозможным, увеличьте уменьшаемое на 11).

Другое очень эффективное сокращение предусматривает использование спаренных смежных цифр. В каждой паре мы вычитаем одну цифру из другой: одна из них — четная (по порядку!) цифра, а другая — нечетная. Возьмем, например, 4 693 260 817. Запишем, это число и сгруппируем цифры в пары:

Результаты вычитания:

$$\underline{46}\quad \underline{93}\quad \underline{26}\quad \underline{08}\quad \underline{17}$$
$$2\quad\ 5\quad\ 4\quad\ 8\quad\ 6$$

Каждый остаток мы получили из соответствующей пары знакомым нам путем, вычитая из цифры единиц цифру десятков. Разумеется, они только временно рассматриваются как цифры единиц и цифры десятков. Мы с самого начала условно приняли $\underline{46}$ за число 46 лишь для данного небольшого вычисления. Если двигаться слева направо, то вместо $\underline{46}$ мы напишем 6 минус 4, будет 2; затем 3 минус 9 эквивалентно 3 плюс 11, т. е. 14; 14 минус 9, будет 5; затем 6 минус 2, будет 4; затем 8 минус 0, будет 8; затем 7 минус 1, будет 6. Так получается ряд цифр под данным числом — каждой паре соответствует одна цифра.

Теперь складываем эти только что полученные цифры: 2 плюс 5, будет 7; плюс 4, будет 11; мы говорим «это нуль», потому что в «одиннадцатых остатках» 11 равнозначно нулю; затем 8 плюс 6, будет 14; мы говорим «это 3», уменьшая на 11, как того требует метод «одиннадцатых остатков». Ответ равен 3.

Упражнение: докажите, что результат вычисления «одиннадцатого остатка» при этих сокращениях не меняется.

П р и м е н е н и я. Мы применяем «одиннадцатые остатки» для контрольной проверки вычислений в таком же духе, как раньше применяли «девятые остатки». Как и прежде, соблюдается следующий принцип:

Какое бы действие мы ни выполняли с заданными числами, мы то же действие выполняем с «одиннадцатыми остатками». Тогда, если ответ правилен, результат действия с «одиннадцатыми остатками» должен быть равен «одиннадцатому остатку» ответа.

Для примера проверим одну из наших прежних задач на умножение.

Нам было дано: $302 \times 114 = 34\,428$. Напишем эти числа и под каждым из них его «одиннадцатый остаток»:

$$\begin{array}{ccccc} 302 & \times & 114 & = & 34\,428 \\ (5) & \times & (4) & = & (9) \end{array}$$

Перемножим 5 и 4; получим 20; вычтем 11 — 9. Все верно.

Вот еще два примера. Посмотрите, сумеете ли вы, пользуясь этим методом, проверить их самостоятельно:

$$\begin{array}{lrcrcr} 1) & 5273 & \times & 54 & = & 284772; \\ 2) & 273 & \times & 154 & = & 42042. \end{array}$$

Глава пятая

ДЕЛЕНИЕ. БЫСТРОТА И ТОЧНОСТЬ

В этой главе мы опишем два метода деления. Первый — простой — метод предназначен для тех, кто математикой специально не занимается и кому не приходится систематически иметь дело с вычислениями.

Второй метод — «быстрый» — сложнее, но овладеть им также нетрудно, а для любителей математики он может оказаться очень интересным и полезным. При делении многозначных чисел этим методом ответ пишется сразу же, без промежуточных вычислений.

ПРОСТОЙ МЕТОД ДЕЛЕНИЯ

Этот метод, как уже говорилось, не требует особых способностей к математике. Мы должны лишь уметь сложить два числа и произвести простое вычитание.

Приступим к делению 27 483 624 на 62. Схема, по которой мы будем действовать, похожа на обычную:

$$6\,2 \qquad 2\,7\,4\,8\,3\,6\,2\,4 \qquad\qquad \textit{ответ}$$

По ходу решения делитель 62 становится верхним числом столбца чисел, который образуется после десятикратного сложения 62 с самим собой.

$$\begin{array}{r l r}
6\,2 & 2\,7\,4\,8\,3\,6\,2\,4 & \textit{ответ} \\
\underline{6\,2} & & \\
1\,2\,4 & & \\
\underline{6\,2} & & \\
1\,8\,6 & & \text{и так далее.}
\end{array}$$

Слева от столбца делителя мы составляем столбец контрольных цифр из сумм цифр, который выглядит так:

$$\begin{array}{c c l}
\textit{Контрольный столбец} & \textit{Столбец делителя} & \\
8 & 6\,2 & \\
\underline{8} & \underline{6\,2} & \\
(16) \to 7 & 1\,2\,4 & \\
\underline{\phantom{(16) \to{}}8} & \underline{6\,2} & \\
6 \leftarrow (15) & 1\,8\,6 & \text{и так далее.}
\end{array}$$

Посмотрим теперь, как отыскиваются контрольные цифры. Точно так же, как при каждом шаге мы прибавляем в столбце делителя еще одно 62, мы прибавляем в контрольном столбце еще одно 8, потому что 8 есть сумма цифр числа 62 ($6 + 2 = 8$). Когда мы приходим к двузначному числу (в примере после сложения $8 + 8 = 16$), мы его тотчас же сокращаем до одиночной цифры простым сложением обеих цифр. Здесь мы имели 16; $1 + 6 = 7$. Теперь уже мы будем иметь дело с цифрой 7. В следующем шаге прибавляем еще 8: $7 + 8 = 15$; $1 + 5 = 6$.

Каждая контрольная цифра при правильном выполнении действий должна быть равна сумме цифр соответствующей строки столбца делителя. Ясно, что если вы будете постоянно так контролировать каждый шаг, то обнаружите ошибку, как только она будет сделана. Благодаря этому все время соблюдается правильный ход вычисления.

Итак, столбец делителя и столбец контрольных сумм цифр составлены:

Контрольный столбец	*Столбец делителя*		*Многозначное делимое*	*Ответ*
8	62	(1)	2 7 4 8 3 6 2 4	(появится здесь)
8	62			
(16) → 7	124	(2)		
8	62			
6 ← (15)	186	(3)		
8	62			
(14) → 5	248	(4)		
8	62			
4 ← (13)	310	(5)		
8	62			
(12) → 3	372	(6)		
8	62			
2 ← (11)	434	(7)		
8	62			
(10) → 1	496	(8)		
8	62			
0 ← (9)	558	(9)		
8	62			
8	620			

После того как столбец делителя закончен и правильность его с помощью сумм цифр проверена, контрольный столбец больше не нужен и его можно вычеркнуть[1].

Составленный нами столбец делителя (порядковые номера в скобках указывают на множители) сразу же избавляет нас от какого бы то ни было умножения, а ведь именно в умножении делается большинство ошибок. Остальное содержание метода выражено в следующем правиле:

Вычитайте последовательно из делимого каждый раз возможно большее число из столбца делителя.

Вы начинаете вычитание с левого конца делимого, как и при обычном делении. При каждом шаге вы заглядываете в столбец делителя и выбираете наибольшее число, которое можно вычесть из соответствующей части делимого. Если мы, скажем, возьмем только две первые цифры числа 2 7 4 8 3 6 2 4, у нас будет 27. Заглянем в столбец делителя. Там нет числа, меньшего 27. Возьмем поэтому первые три цифры делимого: 274. Заглянем теперь в столбец делителя. Какие мы видим числа, меньшие 274? 62 меньше, чем 274; но и 124, и 186, и 248 тоже меньше. Остальные числа больше, чем 274. Следовательно, наибольшее число, которое мы можем вычесть, — 248. Это приводит нас к другому правилу:

Показатель кратности[2] вычитаемого числа есть очередная цифра ответа.

Здесь показатель кратности для 248 равен 4. Значит, 4 — первая цифра ответа.

Столбец делителя		*Делимое*	*Ответ*
6 2	(1)	2 7 4 8 3 6 2 4	4
1 2 4	(2)	2 4 8	
1 8 6	(3)	2 6 8	
2 4 8	(4)		

и так далее.

После того как вы записали цифру ответа, напишите число, которое вы хотите вычесть под делимым, и произведите вычитание, как показано выше. Вычтя, вы получите 26. Теперь снесите следующую цифру делимого. Это то, что вы привыкли делать и при обычном делении.

Повторите то же действие уже с новым числом под делимым. Здесь это 268. Загляните в столбец делителя и выберите наиболь-

[1] Если вообще стоило его выписывать; суть метода, как вскоре убедится читатель, не столько в этом контроле, сколько в замене умножения сложением — мы, так сказать, «заготавливаем впрок» всевозможные произведения делителя на числа от 2 до 9 (множители 0, 1 и 10 можно здесь и не учитывать — умножение на них уже совсем автоматично). — *Прим. ред.*

[2] Т. е. номер строчки в столбце делителя.

шее число, которое можно вычесть. На этот раз выбранное нами в столбце делителя число будет 248. Вычтите его, предварительно записав его показатель (4) как часть ответа:

62	(1)	27483624	44
124	(2)	248	
186	(3)	268	
248	(4)	248	
		203	

и так далее.

Окончательное решение примера выглядит так:

62	(1)	27483624	443284
124	(2)	248	
186	(3)	268	
248	(4)	248	
310	(5)	203	
372	(6)	186	
434	(7)	176	
496	(8)	124	
558	(9)	522	
620	(10)	496	
		264	
		248	
		16 *остаток*	

Итак, ответ: 443 284, а в остатке 16.

Пользуясь следующим приемом, вы, вероятно, сможете при практическом решении задач сэкономить время. Составляя столбец делителя, мы должны приплюсовывать делитель; но это вовсе не значит, что мы должны его каждый раз выписывать. Не так уж трудно посматривать на верх столбца, где записан делитель, и производить сложение делителя с последним полученным нами числом. Тогда решение будет выглядеть так:

465	(1)	364095 : 465	*ответ*
930	(2)	364095	783
1395	(3)	3255	
1860	(4)	3859	
2325	(5)	3720	
2790	(6)	1395	
3255	(7)	1395	
3720	(8)		
4185	(9)		
4650	(10)	*проверка*	

Вот несколько задач в качестве упражнений:

1) 73 458 : 53; 3) 23 525 418 : 3 066;
2) 90 839 : 133; 4) 21 101 456 770 : 326.

Ответы: 1) 1386; 2) 683; 3) 7673; 4) 64 728 395.

Может случиться, хотя это и маловероятно, что лицо, решающее задачу, настолько невнимательно, что выберет в столбце делителя ошибочное число. Никакой беды в этом не будет, так как решающий немедленно обнаружит, что в данном шаге произошла ошибка:

1) Если он взял число большее, чем нужно, он не сможет его вычесть.

2) Если он взял слишком малое число, то при следующем шаге окажется, что очередная «цифра» ответа равна 10.

Вычитания удобно и целесообразно проверять все одновременно путем проверки самого ответа. Делается это следующим способом:

1. *Вычтите из делимого остаток и вычислите сумму цифр полученного числа.* (В примере на стр. 82 мы имели в остатке 16.)

$$\begin{array}{ll} \text{Делимое:} & 27\,483\,624 \\ \text{Остаток:} & \underline{\quad\quad -\ 16} \\ & 27\,483\,608 = 2 \text{ \textit{сумма цифр}} \end{array}$$

2. *Умножьте сумму цифр ответа на сумму цифр делителя:*

$$\begin{array}{llll} \text{Ответ:} & 443\,284 & = 7 & \text{\textit{сумма цифр}} \\ \text{Делитель:} & 62 & = \underline{\times 8} & \text{\textit{сумма цифр}} \\ & & \quad 56 & \\ & & \quad = 2 & \text{\textit{сумма цифр}} \end{array}$$

3. *Сравните результаты, и, если они совпадают, задача решена правильно.* (Ответ: 2 в обоих случаях; значит, решение правильное.)

БЫСТРЫЙ МЕТОД ДЕЛЕНИЯ

Помните, ранее, когда мы занимались умножением, у нас был так называемый метод «единиц и десятков». Мы теперь несколько видоизменим этот метод применительно к делению, дополнив его одним новым приемом. Напомним, что, беря пару цифр (например, 4 и 3) и однозначный множитель (скажем, 6), мы их по-особому умножали и получали одиночную цифру (в данном примере — 5);

Е Д
4 3 $\times$ 6
Действие: $2\underline{4} + \underline{1}8$
Результат: 5

24 — это 4, умноженное на 6. 18 — это 3, умноженное на 6. Так как над 4 в 43 стоит Е («единицы»), мы берем только цифру единиц в 24, т. е. 4. Так как над 3 в 43 стоит Д («десятки»), мы берем 1, т. е. цифру десятков в 18. Затем мы складываем эту 4 и эту 1: $2\underline{4} + \underline{1}8$; получаем 5. Подчеркнутые цифры суть указываемые нами единицы и десятки.

Теперь вместо ЕД-произведения у нас теперь будет ЧД-произведение. Ч заменяет слово «число» и означает, что мы берем число полностью, а не только цифру единиц:

Ч Д
4 3 $\times$ 6
Действие: $\underline{24} + \underline{1}8$
Результат: 25

ЧД-произведение есть 25. И сейчас в нашем действии участвуют 24 (4, умноженное на 6) и 18 (3, умноженное на 6). Но сейчас мы берем все число 24, а не только часть его — 4. Однако мы по-прежнему берем только цифру десятков в числе 18, как на то указывает буква Д. Каково ЧД-произведение от 78 на 3? Оно равно 23:

Ч Д
7 8 $\times$ 3
Действие: $\underline{21} + \underline{2}4$ *Берите только подчеркнутые цифры!*
Результат: 23

Двузначные делители

Теперь мы разберем одну задачу, чтобы дать общее представление о методе, так сказать, для ориентировки. Вам пока незачем запоминать детали. Детали будут в основном разобраны несколькими параграфами ниже. Будем делить 8384 на 32. Пользуясь новым методом, мы со временем сможем получить ответ, не прибегая к записыванию каких-либо промежуточных вычислений. На данной стадии, разумеется, когда мы знакомимся с ним впервые, лучше все же записывать промежуточные шаги. Вот полностью решенная задача:

Делимое	*Делитель*	*Ответ*
8 3 8 4	: 3 2	= 2 6 2

Рабочие числа: 23 08 04

Промежуточное делимое: 8 19 60

Наш первый шаг состоит в том, что мы берем первую (левую) цифру делимого и объявляем ее первой цифрой промежуточного делимого. Каждое промежуточное делимое дает одну цифру ответа:

$$8\,3\,8\,4 : 3\,2 =$$

Промежуточное делимое: $\downarrow$ 8

Второй шаг состоит в том, чтобы разделить промежуточное делимое на первую цифру делителя (3). Полученная в результате цифра — это первая цифра ответа. Не все промежуточные делимые будут делиться нацело, но это роли не играет, так как остатки мы просто отбрасываем; таким образом, первая цифра нашего ответа — 2 (8, деленное на 3).

Теперь мы берем первую цифру ответа и особым образом «перемножаем» с делителем. Это дает нам две группы. В разбираемой задаче ЧД-цифра для данного шага вычисляется следующим образом:

$$\begin{array}{cccccc} Ч & Д & & & & \\ 3 & 2 & \times & 2 & = & 6 \end{array}$$

Действие: $\underline{0}6$ $\underline{0}4$

Результат: 06

Е — часть неполной ЕД-пары, Д в задачах, в которых только двузначные делители, исчезает:

$$\begin{array}{cccccc} & Е & & & & \\ 3 & 2 & \times & 2 & = & 4 \end{array}$$

Действие: $0\underline{4}$

Забудем пока про ЧД- и Е-цифры и посмотрим на верхний ряд цифр в нашей рабочей схеме. Эти рабочие цифры используются лишь для того, чтобы найти прямо под ними промежуточные делимые

$$\underline{8\,3\,8\,4} : 3\,2 = 2\,6\,2$$

Рабочие числа:		23	08	04
		↓	↓	↓
Промежуточное делимое:	8	19	6	0

Заметьте, что каждое рабочее число состоит из двух знаков, из которых один может быть и нулем. Мы получим одну цифру от промежуточного делимого и другую от основного делимого.

Цифра десятков 2 (в числе 23, наверху) получается от вычитания полученной чуть раньше ЧД-цифры (06) из промежуточного делимого (8)

Рабочее число:

```
8   3   8   4
-------------
  2
 -06
8
```

Промежуточное делимое: 8

Промежуточное делимое 8 минус ЧД 06 равно цифре десятков 2 рабочего числа.

Чтобы получить цифру единиц 3 (в числе 23, наверху), мы просто сносим очередную цифру делимого:

Рабочее число:

```
8   3   8   4
-------------
    ↓
    23
 -ЧД
8
```

Промежуточное делимое: 8

Как мы уже упоминали, рабочее число нужно лишь для того, чтобы вывести прямо под ним промежуточное делимое. Получив рабочее число, мы немедленно вычитаем из него только что найденную Е-цифру.

Рабочее число:

```
8   3   8   4
-------------
     23
-Е   04
     19
```

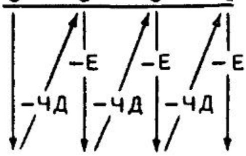
Промежуточное делимое: 19

Рабочее число 23 минус Е-цифра 04 равно промежуточному делимому 19.

Новое промежуточное делимое дает нам очередную цифру ответа и приводит к цифре десятков следующего рабочего числа. Как мы указывали в начале обсуждения процесса деления, очень важно «прочувствовать» ход вычислений — это душа системы. Мы начинаем с промежуточного делимого, которое приводит к рабочему числу, которое приводит к новому промежуточному делимому, которое опять приводит к рабочему числу, и так далее. Схематически наша задача выглядит так:

$$8\;3\;8\;4 : 32 = 262$$

Рабочие числа:



Это — суть нашей системы. Все остальное — повторение того, что мы сейчас видели. Продолжим решение нашей задачи.

Наше последнее число — 19. Мы снова делили это промежуточное делимое на первую цифру делителя, т. е. на 3. Это дает нам 19, деленное на 3, что равно 6. (Любые остатки мы отбрасываем!) Итак, 6 — следующая цифра ответа:

Ч Д
Е

8 3 8 4 : 3 2 = 26

Рабочее число: 23

Промежуточное делимое: 8 1 9 *6 равно 19, деленному на 32.*

Затем мы используем 6 для двух типов умножения на 32, сперва ЧД, а потом Е, и производим с их результатами два вычитания:

ЧД
Е

8 3 8 4 : 3 2 = 2 6

0 здесь 0, так как ЧД равно 19:

–ЧД

19

Ч Д
3 2 × 6
18 12
19

Снесем очередную цифру делимого:

8 3 8 4 : 3 2 = 2 6

08

8 19

Затем вычтем результат Е-умножения:

$$8\ 3\ 8\ 4 : 32 = 26$$

08

−ЧД −Е

8 19 6

Е
3 2 × 6
12
Е = 2

Последнюю цифру нашего ответа мы получаем, разделив наше последнее промежуточное делимое 6 на 3 (входящее в число 32):

8 3 8 4 : 32 = 262
23 08
8 19 6

Мы нашли теперь последнюю цифру ответа, но нам нужно еще определить остаток, в тех случаях, когда он существует. Для этого мы ЧД-умножаем делитель 32 на 2, взятую из ответа.

Ч Д
3 2 × 2

Действие: 06 04
Результат: 6

Наше ЧД *есть 6.*

Вычитая эту 6, имеем:

$$8\ 3\ 8\ 4 : 32 = 262$$

04

−ЧД

6

6 минус ЧД *6 равно 0*

Мы снесли очередную цифру делимого. Теперь мы вычитаем результат Е-умножения:

$$8\ 3\ 8\ 4 : 32 = 262$$

04

0

Е
3 2 *на 2—будет 04 (04 минус* Е *04=0).*

Этот нуль означает, что остатка нет. Деление закончено. Надо ли оговаривать то, что в практических вычислениях мы никаких стрелок не рисуем? На практике мы вначале будем писать рабочие числа, но вскоре легко обойдемся без многих из них. Возможно, что мы все вычисление проведем в уме и напишем ответ без каких-либо промежуточных шагов. Но первое время все же благоразумнее писать рабочие числа так, как мы показали в нашем примере.

Детали метода

1) Мы знаем, что для получения первой цифры ответа надо разделить первую цифру делимого на первую цифру делителя:

$$\underline{8}\,6\,1 : \underline{2}\,1 = \underline{4}$$

Но что нам делать с такой задачей:

$$1\,6\,1\,2 : 3\,1 = ?$$

Разделить 1 на 3 нельзя. Поэтому надо взять первые две цифры делимого числа, т. е. 16:

$$\underline{1\,6}\,1\,2 : \underline{3}\,1 = 5$$ *Любые остатки мы отбрасываем.*

Таким же образом получаем:

$$\underline{3\,3}\,8\,4 : \underline{6}\,4 = 5$$

2) Для получения остальных цифр ответа мы продолжаем пользоваться первой цифрой делителя. Но делим на нее промежуточные делимые, а не основное.

3) Как только мы нашли одну из цифр ответа, немедленно используем ее для «умножения» на делитель по форме ЧД. Например:

$$\underline{2\quad 2\quad 9\quad 4} : \underline{6}\quad\underline{2} = \underline{3}$$

$\downarrow$

22

Ч	Д		
6	2	×	3
$\underline{18}$	$\underline{06}$		

18 =*искомое* ЧД-*произведение.*

Предполагается, что в действительности ЧД-умножение 62 на 3 производится в уме. Результат (18) должен быть вычтен из последнего найденного нами числа 22:

$$\underline{2\quad 2\quad 9\quad 4} : 6\quad 2 = 3$$

4

–ЧД

22 *22*—ЧД*18=4*

На этом шаге в работу включается остальная часть делимого. Мы сносим следующую его цифру:

```
2 2 9 4 : 6 2 = 3
    49
22
```

4) Чтобы произвести второе вычитание, мы должны умножить последнюю из найденных цифр ответа на цифру единиц делителя и использовать цифру единиц от полученного результата:

```
2 2 9 4 : 6 2 = 3
  49
   | −6
22 43
```

Вычтем 6, потому что 6 — это цифра единиц в 2×3.

Доведите задачу до конца. Теперь остается лишь повторить то, что мы только что проделали:

```
2 2 9 4 : 6 2 = 3 7
    43
```

7 = 43 : 6.

Найти ЧД-произведение 62 на новую цифру ответа (7):

```
2 2 9 4 : 6 2 = 3 7
     0
  43
```

ЧД-*произведение* = *43, а 43 — 43* = *0.*

Снести следующую цифру делимого:

```
2 2 9 4 : 6 2 = 3 7
     04
  43
```

И наконец, мы берем только одну цифру единиц из произведения цифры единиц числа 62 на последнюю цифру ответа (7):

$$\underline{2\ \ 2\ \ 9\ \ 4}\ :\ 6\ \underline{2} = 3\ \underline{7}$$

$$04 \xrightarrow{-4} 0 \qquad\qquad 2\times 7=14.$$

Это конец — вычислять больше нечего. Что означает последний нуль? Это остаток. Последнее рабочее число в нижней строке есть всегда остаток.

5) В последнем примере остаток был равен нулю. В таком случае мы говорим «разделилось без остатка» или «нацело». Допустим теперь, что вместо 2294 нам было дано 2296 и это число мы тоже хотим разделить на 62. Все будет точно так же, за исключением того, что теперь делимое на 2 больше. Мы знаем, что эта дополнительная 2 окажется остатком.

Рассмотрим вычисление. Оно будет таким же, за исключением последнего шага. В этом шаге у нас было:

$$2\ \ 2\ \ 9\ \ 6\ :\ 6\ \ 2 = 3\ \ 7$$

$$9 \to 43 \to 06$$

Мы теперь должны взять цифру единиц от 2 (2 от 62), умноженную на 7, и вычесть ее:

$$2\ \ 2\ \ 9\ \ 6\ :\ 6\ \overset{\text{E}}{\underline{2}} = 3\ \underline{7}$$

$$06 \xrightarrow{-4} 2$$

Итак, наше последнее рабочее число по обычной схеме — 2. 2 — это остаток. Дополнительная двойка, которую мы прибавили к числу 2294 (разделившемуся без остатка), появляется в самом конце как последнее рабочее число.

6) Иногда бывает так, что мы хотим (как в пункте 3) вычесть ЧД-цифру из последней рабочей цифры, но не можем этого сделать. Число оказывается слишком большим, и вычитание невозможно. Например:

$$1\ 9\ 0\ 4 : 3\ 4 = 6$$

$$19 \qquad\qquad 6 = 19 : 3.$$

Затем мы умножаем по типу ЧД 34 на 6:

$$\begin{array}{ccc} & Ч\ Д & \\ & 3\ \ 4 & \\ \underline{18} & + & \underline{24} \\ & 20 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 9 & 0 & 4 & : & 3 & 4 & = & 6 \end{array}$$

?

−20

19

Но 20 нельзя вычесть из 19. В подобных случаях *уменьшите цифру ответа на* 1.

Уменьшив 6 на 1, мы исправляем первую цифру ответа на 5:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & Ч & Д & & \\ 1 & 9 & 0 & 4 & : & 3 & 4 & = & \underline{5} \end{array}$$

20

−17

19

А дальше все идет по-старому. Мы вычитаем цифру единиц из цифры, получаемой в результате умножения 4 на 5 (которая оказывается нулем), а затем находим очередную цифру ответа:

$$\begin{array}{l} 1\ 9\ \ 0\ 4 : 3\ 4\ \ =\ \ 5\ 6 \\ \quad\ \ 20 \\ \quad\ -0 \\ \quad\ \ 20 \end{array} \qquad 6 = 20 : 3.$$

Затем мы вычисляем ЧД-произведение 34 на полученную цифру 6. Получим число 20—число, которое нам уже встречалось:

$$\begin{array}{cccccccccc} & & & & & Ч & Д & & & \\ 1 & 9 & 0 & 4 & : & 3 & 4 & = & 5 & 6 \end{array}$$

04

20

И наконец, вычитаем цифры единиц от 4, умноженного на 6 (т. е. 4):

1 9 0 4 : 3 4 = 5 6
04
| −4
↓
0

И снова все заканчивается нулем.

Остатка нет. Ответ равен 56.

До сих пор делимые были четырехзначными числами. Но тот же метод применим к делимым любой длины. Вот пример:

(Расставьте широко цифры!)

ЧД
Е
4 7 9 5 3 5 : 6 3 = 7 6 1 1
39 15 13 45
−ЧД −Е −ЧД −Е
47 38 7 10 42

Остаток — 42.

При вычислении на практике стрелки не рисуются. Их легко там можно вообразить. Далее, поскольку принцип уже понят, мы можем опустить среднюю строку рабочих цифр. В действительности решение будет выглядеть так:

Ч Д
Е
4 7 9 5 3 5 : 63 = 7 6 1 1
$\overline{3}8\ \overline{7}\ \overline{1}0\ \overline{4}2$

Возможно, что, освоившись со всеми шагами, вы придете к заключению, что можете обойтись без всяких рабочих цифр вообще. Даже та единственная строка рабочих цифр, которая показана выше в примере, может быть опущена, если как следует сосредоточиться над решением. Тогда записывать придется один только ответ. Пометки ЧД и Е в разобранной нами задаче служат только напоминанием, они могут свободно быть отброшены, коль скоро вы почувствуете, что больше в напоминаниях не нуждаетесь.

Полезно запомнить следующий простой прием:

Если вторая цифра делителя равна 8 или 9, то не делите на первую цифру делителя, а увеличьте ее на 1 и затем делите.

Например, если делитель 39, то мы делим на 4, а не на 3, так как 39 ближе к 40, чем к 30. Например:

$$\begin{array}{l} 20\ 28 : 39 = ? \\ \underline{20} \end{array}$$

Первый шаг, как мы его выполняли до сих пор, состоял в том, чтобы сказать: «20, деленное на 3, есть 6» — и записать 6 в качестве первой цифры ответа. Но тогда нам придется потом переправлять 6 на 5, потому что ЧД-произведение слишком велико и мы не сможем его вычесть. (Уточняем: ЧД-произведение от 39 на $6 = \underline{18} + \underline{5}4 = 23$). Вот почему мы теперь делим 20 сразу на 4, а не на 3. Таким образом, первой цифрой ответа сразу оказывается 5, и ее не приходится переправлять:

$$\begin{array}{lcl} 20\ 28 : 39 = 5 & & \\ \downarrow & & \mathit{5 = 20 : 4.} \\ \underline{20} \qquad\ \ (4) & & \end{array}$$

Важно отметить, что правильный ответ будет получен и без этого. Но если заботиться об экономии времени, то разумно увеличивать на 1 первую цифру делителя каждый раз, когда вторая цифра есть 6, 7, 8 или 9.

А как мы сможем узнать, что новая цифра ответа слишком мала (если это действительно так)? Ничто в ЧД-произведении не предостережет нас — оно мало, так что спокойно может быть вычтено. Ничего не подскажет и Е-произведение. Но тут нам приходит на помощь «промежуточное делимое»:

Если промежуточное делимое больше делителя или равно ему, то последняя цифра ответа слишком мала.

Допустим, в делении сделана ошибка:

$$\begin{array}{l} 57\ 63 : 81 = 6 \\ 57 \end{array}$$

(На самом деле мы знаем, что 57 : 8, есть 7, а не 6.) Обратите внимание, как эта ошибка обнаруживается с помощью промежуточного делимого:

$$\begin{array}{lcl} 576\ 3 : 81 = 6 & & \\ 96 & & \\ -6 & & \\ 57\ 90 & & \text{ЧД} = \mathit{48;}\quad \text{Е} = \mathit{06.} \end{array}$$

Промежуточное делимое 90 — явно ошибочное, оно больше делителя. Значит, 6 надо изменить на 7.

Если вы просмотрели, что 90 больше, чем 81, то при следующем шаге вы принуждены будете обратить на это внимание. Ибо вам придется сказать: «90, деленное на 8, равно 11», а это равносильно тому, что сказать: «Следующая цифра ответа — 11».

Трехзначные делители

Предположим, что мы хотим разделить 236 831 на 674. Вычисление будет выполняться почти так же, как до сих пор. Все очень похоже, как если бы мы делили на 67 вместо 674. Но мы кое-что скажем еще о третьей цифре делителя.

Вспомним наши прежние схемы со стрелками, указывающими вверх, означавшими «вычтите ЧД-произведение», и стрелками, указывающими вниз, означавшими «вычтите Е-произведение». Эти указывающие вниз стрелки будут теперь иметь несколько иное значение. Сравним две схемы:

Двузначные делители:

```
                     Ч Д
                       Е
2 3 6 8 3 1  :  6 7  =  ?
```

Трехзначные делители:

```
                      Ч Д
                        Е Д
2 3 6 8 3 1 : 6 7 4  =  ?
```

При помощи 67 и цифры ответа мы теперь образуем ЧД-произведение, которое должно быть вычтено на указывающей вверх стрелке:

```
                                Ч Д
                                  Е Д
2   3   6   8   3   1           6 7 4   =   3
       36
      ↗
   −20                          ЧД = 67 × 3 = 18 + 21 = 20
   /
 23
```

Пока все, как было прежде, на цифру 4 в числе 674 мы просто не обращали внимания. Но теперь мы подходим к вычитанию Е-произведения на стрелке, указывающей вниз. Оно теперь становится ЕД-произведением:

```
            Ч Д
              Е Д
            6 7 4   ×   3
Действие:    21 12            ЕД = 74 × 3 = 21 + 12 = 2.
Результат:    2
```

Двигаясь вниз от 36, мы вычитаем ЕД-произведение 2:

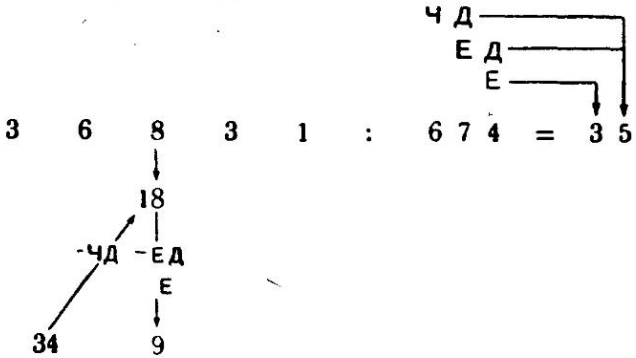
```
2   3   6   8   3   1   :   6 7 4   =   3
        36
        |
       −2
        ↓
        34
```

Наше последнее число — 34. Оно на нижней строке, следовательно, является промежуточным делимым, и мы его сейчас, как всегда, разделим на цифру 6 от числа 674:

```
2 3 6  8 3 1 : 6 7 4  =  3 5
    ↓
    34
```

И так далее. Мы образуем ЧД-произведение 67 и этой 5 и вычитаем его из промежуточного делимого. Затем мы образуем ЕД-произведение 74 и этой 5 и вычитаем, чтобы получить следующее промежуточное делимое.

Но повторение оказывается не совсем буквальным. Следующая цифра ответа обрабатывается уже не точно так, как первая: мы используем о б е уже найденные цифры ответа:



ЧД-произведение получается как всегда: 67, умноженное на 5, будет $\overline{3}0$ плюс $3\overline{5}$, т. е. 33. Вычитаем 33 из 34, остается 1, сносим 8, и в рабочей строке у нас 18. Но число, которое надлежит вычесть из 18, теперь есть сумма двух слагаемых: ЕД плюс Е. Вышеприведенная диаграмма показывает происхождение обоих этих слагаемых:

```
   Е  Д                     Е
6  7  4  ×  3 5       6 7 4  ×  3 5
   35 20                  12
```

Результат: 7 (ЕД-произведение) плюс 2 (Е-произведение) равно 9.

Мы вычитаем эту 9 из 18, чтобы получить промежуточное делимое 9. Мы делим 9 на 6 от числа 674 и получаем 1. Таким образом, очередная цифра ответа — 1:

```
2  3  6  8 3 1 : 6 7 4  =  3 5 1
     36 18
   23 34  9
```

Пример окончен. 351 — искомое частное.

В других задачах делимое может, конечно, быть значительно длиннее, чем 236 831, и тогда мы должны будем продолжить процесс. Чтобы учесть все случаи, даем следующее общее правило:

Всегда, когда делитель имеет три цифры (в диаграмме ниже показанные тремя значками х*),* ЕД *(или «вычитание вниз») вычисляется следующим образом:*

Делимое:

ЕД
Е
х х х = – – – х х

(Два х *в ответе — это две цифры неполного ответа, найденные последними.)*

В нашем примере частное оказалось равным 351. Теперь мы должны еще найти остаток. Чтобы знать, когда мы уже получили частное, мы делаем следующее:

Считая от правого края делимого, отмечаем количество знаков, на один меньшее числа цифр делителя.

В нашем делителе 674 — три цифры; отмечаем два знака:

2 3 6 8 / 3 1

Эта отметка играет роль указателя, когда нам следует остановиться. Все цифры, расположенные влево от отметки, служат для нахождения цифр ответа (частного).

Числа вправо от отметки служат для нахождения остатка. Найдем его:

ЧД
ЕД
Е
2 3 6 8 / 3 1 : 6 7 4 = 3 5 1
18 33 261
9 26 257

Остаток—257

Мы получили 33 в рабочих числах обычным путем: ЧД от 67, умноженного на 1, 06 плюс 07, т. е. 6. Вычитаем 6 из 9, получаем 3 и сносим 3 из делимого. От 33 мы отнимаем, как и прежде, ЧД- и Е-произведения (ЧД — это 74, умноженное на 1; 07 плюс 44 равно 7; Е — это 4, умноженное на 5, получится 20, т. е. нуль) и получаем 33 — 7 = 26.

26 переносится наверх без всякого ЧД-вычитания и вместе с 1 из делимого дает 261. Заключительный шаг вниз выполняется

вычитанием произведения правой цифры делимого (4 из числа 674) и правой цифры ответа (1 из числа 351):

$$\begin{array}{r} 2\ 6\ \ 1 \\ -4 \\ \hline 2\ 5\ \ 7 \end{array}$$

Остаток — 257.

Вообразите себе, что надрез в делимом делит его на две части с левой стороны — район частного, с правой — район остатка. Мы пересекаем границу, рисуя направленную вверх ЧД-стрелку (вычитание), использующую последнюю цифру ответа. Пересекая границу, мы все еще действуем нормально, т. е. так, как в районе частного. Мы на самом деле выполняем нормально весь шаг, потому что следующее по направлению вниз ЕД + Е = вычитание также производится в районе частного. Лишь после этого мы начинаем действовать в районе остатка. При этом:

1. Не производятся никакие дальнейшие ЧД-вычитания. Направленная вверх стрелка переносит все промежуточное делимое.

2. Последнее по направлению вниз вычитание производится с помощью только произведения правой цифры ответа (а не последних двух цифр) и правой цифры делителя.

Это описание вычисления остатка полезно тем, что оно, с очевидными изменениями, применимо к делителям любой длины. В следующем разделе мы еще вернемся к этому пункту.

Вот другая иллюстрация — разделите 196 307 на 512. В 512 три цифры, следовательно, отмечаем два знака справа и начинаем деление:

ЧД

ЕД

Е

1 9 6 3 / 0 7 : 5 1 2 = 3 8 3

46 33

19 43 18

Теперь мы пересекаем линию границы «надрез», производим нормальное ЧД-вычитание и заканчиваем этот шаг нормальным вычитанием по направлению вниз:

ЧД

ЕД

Е

1 9 6 3 / 0 7 : 5 1 2 = 3 8 3

46 33 30

19 43 18 21

ЧД = 51 × 3 = 15

ЕД = 12 × 3 = 3

Е = 2 × 8 = 6

Теперь мы находим остаток: по стрелке, направленной вверх, мы ничего не вычитаем, а вместо этого переносим наверх все промежуточное деление в качестве части нового рабочего числа. Затем мы берем только произведение последней цифры (3) из ответа 383 и последней цифры (2) делителя по стрелке, направленной вниз (вместо 83, когда бы действовали «нормально»):

1 9 6 3 / 0 7 : 5 1 2 = 3 8 3

46 33 30 217

19 43 18 21 211 *остаток*

Обратите внимание на то, что справа от линии границы у нас нет «промежуточных делимых», все числа «рабочие». Этим мы хотим сказать, что ни одно из этих чисел не делится на первую цифру делителя для нахождения очередной цифры ответа. Мы уже имели полный ответ, и сейчас нас интересует только остаток.

Вот полное решение задачи, записанное так, как это делается в действительности:

Ч Д

Е Д

Е

6 3 1 2 3 2 / 5 7 : 9 8 3 = 6 4 2 1 4

51 32 23 62 95 897

63 42 21 15 48 89 895

О т в е т: 64 214. Остаток — 895. (Заметьте, что 983 настолько близко к 1000, что мы наши промежуточные делимые делим на 10, а не на 9, чтобы не переправлять потом цифры ответа.)

Вот другая задача: 39 863 907 разделить на 729. Так как вторая цифра в 729 только 2, а не 8 или 9, мы не собираемся брать 8 вместо 7 в качестве делителя. С другой стороны, нам придется в одном месте уменьшить цифру ответа, потому что мы встретимся с ЕД + Е-цифрой, которая будет слишком велика для вычитания. Это показано цифрой 7, зачеркнутой и переправленной на 6:

ЧД

ЕД

Е

3 9 8 6 3 9 / 0 7 : 7 2 9 = 5 4 ~~7~~6 8 3

38 66 73 39 10 07

39 34 50 60 22 0 0

О т в е т: 54 683. В остатке нуль, значит, разделилось без остатка.

З а д а ч и:

1) 92 880 : 432 = ?
2) 31 392 : 654 = ?
3) 54 763 : 489 = ?

Ответы:

```
1) 9  2  8  8  0 : 4 3 2  =  2 1 5
     12 28 08 00                        Остатка нет.
   9  6 21  0  0
2) 3  1  3  9  2 : 6 5 4  =  4 8
        53 09 02                        Остатка нет.
     31 52  0  0
3) 5  4  7  6  3 : 4 8 9  =  1 1 1
     14 27 66 493                       Остаток — 484.
   5  6 10 49 484
```

Делители любой длины

В вычислениях с делителями из четырех или более цифр, как в случае 13 671 514, деленного на 4 217, мы применяем те же основные правила, что и прежде:

1. Вычитаем ЧД-произведение для нахождения рабочего числа.

2. Вычитаем ЕД-произведение из рабочего числа для получения нового промежуточного делимого.

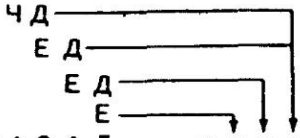
3. Делим результат (промежуточное делимое) на первую цифру ответа для отыскания очередной цифры ответа.

Но теперь при четырехзначном делителе у нас есть еще одна цифра, которую мы должны учесть, а именно цифра 7 в числе 4 217. Мы учитываем ее, «расширив» ЕД-произведение (другие два шага остаются без изменений). Что значит «расширить» ЕД-произведение, ясно из следующей схемы:

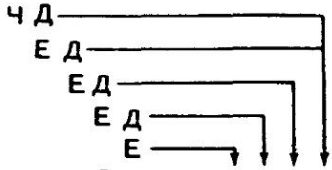
```
Двузначные делители:        Ч Д
                              Е
                            4 2
                            Ч Д
                              Е Д
                                Е
Трехзначные делители:       4 2 1
                            Ч Д
                              Е Д
                                Е Д
                                  Е
Четырехзначные делители:    4 2 1 7
```

Каждая дополнительная цифра в делителе требует дополнительную ЕД-пару. Это приводит, как показано выше, к частично перекрывающимся ЕД-парам. Четырехзначный делитель потребует максимум три ЕД-пары, пятизначный делитель — четыре ЕД-пары. В конце мы всегда имеем только одно Е, но, в сущности, это ЕД-пара. Под Д нет никакой цифры, значит, оно ничего не дает и поэтому не к чему ее и писать.

Какую нам брать цифру для умножения на нее каждую ЕД-пару? Очевидно, каждой ЕД-паре соответствует одна цифра ответа. Но какая именно? Давайте обозначим все цифры ответа через x. Каждое x заменяет какую-то цифру, значение которой нам здесь не существенно. Допустим, мы уже нашли четыре цифры ответа. Тогда умножение по типу ЕД связывает ЕД-пары с цифрами ответа следующим образом:



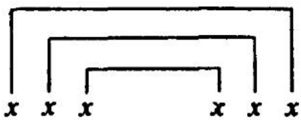
Четырехзначные делители: 4 2 1 7 = $x\ x\ x\ x$



Пятизначные делители: 4 2 1 7 3 = $x\ x\ x\ x$

Затем мы все результаты ЕД-умножений складываем. Это то, что мы уже делали в случае дву- и трехзначных делителей.

Если вы всмотритесь в расположение линий на схеме, то заметите, что они как бы «вписаны одна в другую». Такую же схему мы имели в главе об умножении:



«Двигайтесь с обоих концов внутрь» — так гласило бы правило, описывающее показанное здесь движение. Весь процесс в целом может быть сведен к трем правилам:

1. Умножьте при каждом шаге *новую* цифру ответа на первые две цифры делителя по типу ЧД.

2. Умножьте ту же *новую* цифру ответа по типу ЕД на вторую и третью цифры делителя.

3. Затем двигайтесь по направлению к середине, умножая поочередно другие ЕД-пары делителя на *старые* цифры ответа (при 4217 мы двигаемся внутрь дважды: сперва к паре 17, а затем к неполной ЕД-паре 7).

Рассмотрим наш прежний пример: 13 671 514 разделить на

4 217. Применим к нему только что сформулированные три правила. Прежде всего мы видим, что в делителе 4 217 *четыре* цифры, следовательно, отмечаем справа *три* знака (всегда на один меньше, чем в делителе):

1 3 6 7 1 / 5 1 4 : 4 2 1 7 = 3
13

Последние три цифры делимого будут использованы для нахождения остатка. Первая цифра ответа — 3. Она, разумеется, есть результат деления 13 на 4 (от числа 4217). Теперь применяем три правила:

В т о р а я ц и ф р а о т в е т а:

Вычтите ЧД-произведение (1-е правило):

ЧД

1 3 6 7 1 / 5 1 4 : 4 2 1 7 = 3

1

–ЧД(12)

13

ЧД = 42 × 3
12 06
ЧД = 12

Вычтите ЕД-произведение (2-е правило):

ЧД
ЕД

1 3 6 7 1 / 5 1 4 : 4 2 1 7 = 3

16

–ЕД(06)

13 10

ЕД = 21 × 3
06 03
ЕД = 6

Разделите частичное делимое 10 на 4 (от числа 4 217), и вы получите очередную цифру ответа — 2.

Т р е т ь я ц и ф р а о т в е т а:

Вычтите ЧД-произведение (1-е правило):

ЧД
ЕД
ЕД

1 3 6 7 1 / 5 1 4 : 4 2 1 7 = 3 2

16 27

–ЧД08

13 10

ЕД = 42 × 2
08 04
ЕД = 8

Вычтите ЕД-произведение (2-е и 3-е правила):

```
                                          ЧД ──────────┐
                                           ЕД ─────────┤
                                             ЕД ────┐  │
1  3  6  7  1/5  1  4   :   4 2 1 7  =   3 2
   16 27
       |
   −ЕД(09)                      ЕД = 21 × 2; 17 × 3
       ↓                              04 02    03 21
 13 10 18                       ЕД = 4 плюс 5 = 09
```

Теперь, разумеется, следующая цифра ответа получается от деления последнего числа 18 на 4 (18, деленное на 4, будет 4).

П о с л е д н я я   ц и ф р а   о т в е т а:

В данном примере четвертая цифра — это и есть последняя цифра ответа. (Мы это знаем по «надрезу», разделяющему делимое на «район частного» и «район отстатка».)

Вычтите ЧД-произведение (1-е правило):

```
                                          ЧД ────────────┐
                                           ЕД ───────────┤
                                             ЕД ──────┐  │
                                               Е ──┐  │  │
1  3  6  7  1/5  1  4   :   4 2 1 7  =   3 2 4
   16 27 21
         /
   −ЧД(16)                                 ЧД = 42 × 4
      /                                         16 08
 3 10 18                                   ЧД = 16
```

Вычтите ЕД-произведение (2-е и 3-е правила):

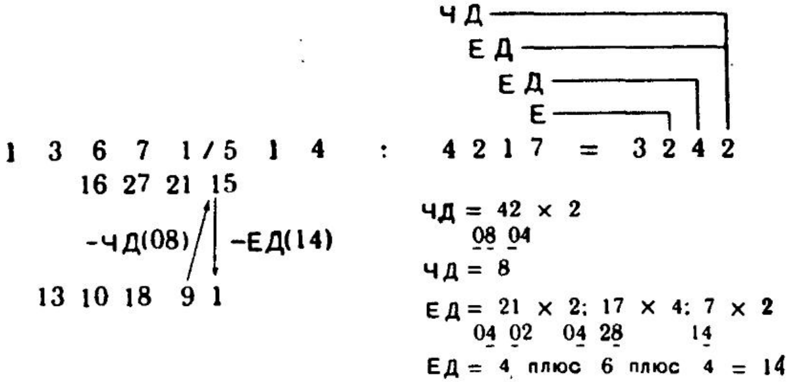
```
                                          ЧД ────────────┐
                                           ЕД ───────────┤
                                             ЕД ──────┐  │
                                               Е ──┐  │  │
1  3  6  7  1/5  1  4   :   4 2 1 7  =   3 2 4
   16 27 21
          |
     -ЕД(12)                  ЕД = 21 × 4; 17 × 2; 7 × 3
          ↓                         08 04   02 14    21
 13 10 18  9                  ЕД = 8 плюс 3 плюс 1 = 12
```

Последняя цифра ответа — 2; это последнее промежуточное частичное делимое 9, деленное на 4 (от числа 4217).

О с т а т о к:

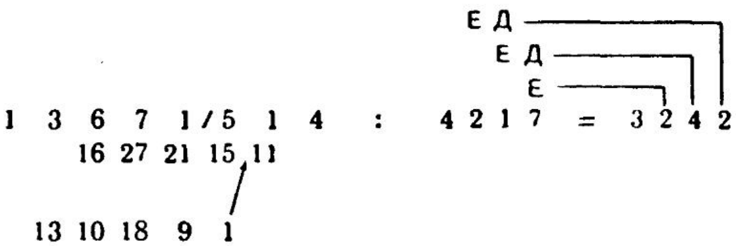
После получения всех цифр частного (ответа) мы ищем остаток. В процессе нахождения остатка — три шага:

1. Мы пересекаем «границу» («надрез» в делимом), выполняя вычисления нормальным образом. Мы производим наше ЧД-вычитание для нахождения первого рабочего числа на стороне остатка. ЕД-вычитание также производится нормальным образом:



Пока все делалось точно так же, как до сих пор. Отличие мы почувствуем лишь в следующем шаге. Обратите внимание, как вычисления ЧД и ЕД в делителе и частном перемещаются слева направо. При этом шаге 3 из частного 3 242 не было использовано.

2. Перейдя «границу», мы больше никаких ЧД вычислять не будем. Вместо этого мы лишь переносим наверх новое промежуточное делимое для образования части нового рабочего числа



3. И наконец, при каждом вычитании, которое мы делаем, идя вниз, мы используем на одну цифру частного меньше (считая слева). Обратите внимание, как это перемещение слева направо с каждым шагом сокращает одно вычисление ЕД. Сравните верхнюю и нижнюю схемы:

ЕД
Е

1 3 6 7 1/5 1 4   4 2 1 7 = 3 2 4 2
16 27 21 15 11

−ЕД(11)

13 10 18 9 1 0

ЕД = 17 × 2; 7 × 4
02 14   28
ЕД = 03 плюс 08 = 11

Так как больше никаких ЧД-вычитаний производить не требуется, переносим промежуточное делимое, как в шаге 2, наверх. Затем мы, как в шаге 3, перестаем брать следующую левую цифру частного. Это — последний шаг в нашей задаче; как и следовало ожидать, мы заканчиваем умножением цифры единиц делителя на цифру единиц частного. Мы продолжали двигаться слева направо, пока не добрались до обоих концов и делителя, и частного:

Е

1 3 6 7 1/5 1 4 : 4 2 1 7 = 3 2 4 2
16 27 21 15 11 04

−Е(04)

13 10 18 9 1 0 0

Е = 7 × 2
14
Е = 04

Последнее найденное нами число есть остаток. В данном примере последнее число равно нулю, т. е. деление произведено нацело, без остатка.

У вас могло создаться впечатление, что процесс деления очень сложен. Однако это обманчиво. Эта кажущаяся сложность объясняется тем, что мы для полной ясности повторяли все малейшие подробности вычисления. На практике, когда метод ясно понят, вычисление выполняется быстро и фактически очень просто.

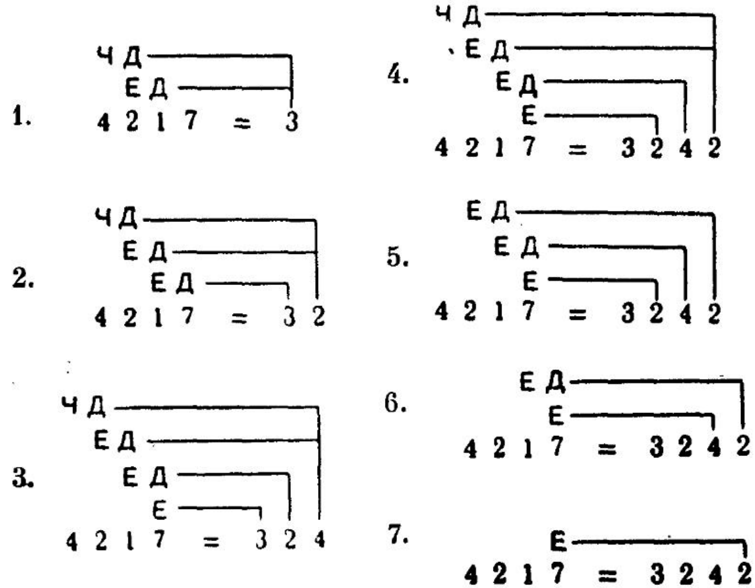
Единственная действительная трудность, которая никогда не исчезнет, заключается в необходимости быть всегда внимательным. Ошибки, допущенные по невнимательности, представляют опасность для любого вида вычислений. При выполнении деления по методу Трахтенберга мы должны особо внимательно отнестись к нахождению правильного парного ЕД-произведения. Повторим на всякий случай три правила нахождения цифр ответа, на которые мы умножаем ЧД- и ЕД-пары в делителе:

1. Умножьте новую цифру ответа при каждом шаге на первые две цифры делителя по типу ЧД.

2. Умножьте ту же новую цифру по типу ЕД на вторую и третью цифры делителя.

3. Затем двигайтесь по направлению к середине, умножая другие ЕД-пары на старые цифры ответа.

Может быть, следующие диаграммы, на которых показаны лишь делитель и частное только что решенной задачи, дадут вам более ясное представление об отношениях ЧД- и ЕД-пар к каждой вновь найденной цифре ответа (1. — 4.), а также к определению остатка (5. — 7.):



Надо быть внимательным при работе с многочисленными ЕД-произведениями. Чтобы уменьшить опасность ошибки, а также для облегчения работы, каждый раз, когда вы находите новое ЕД-произведение, немедленно вычитайте его из рабочего числа, а то, что остается, используйте как новое рабочее число, из которого вы вычитаете следующее ЕД-произведение.

ПРОВЕРКА ДЕЛЕНИЯ

Скажем совсем коротко об основных приемах проверки «быстрого» деления.

1. Вычтите остаток из делимого. Например, в одной из задач мы разделили 2296 на 62 и получили ответ 37 и 2 остатке. Вычтите эту 2 из 2296. Результат 2294 есть уменьшенное делимое, которое при делении на 62 не дает остатка.

2. Найдите сумму цифр этого уменьшенного делимого, сложив все его цифры, как мы делали прежде. Например, 2294 дает 2 плюс 2 плюс 9 плюс 4 равно 17. Приводим это к одиночной цифре: $1 + 7 = 8$.

3. Найдите сумму цифр делителя (в нашей задаче — 62, т. е. 8) и сумму цифр ответа (37, т. е. 10 и окончательно 1). Затем перемножьте обе эти суммы цифр ($8 \times 1 = 8$).

4. Сравните только что найденное произведение двух цифр (8) с суммой цифр уменьшенного делимого из пункта 2. Там тоже было 8. Вычисление правильно.

Возможны и варианты. Например, можно не вычитать остаток из делимого, а вместо этого сразу вычесть его сумму цифр из суммы цифр делимого и т. п.

Задачи для упражнений:

1) 5 678 : 41;	12) 43 271 : 72;	23) 9 345 : 99;
2) 4 871 : 74;	13) 81 035 : 95;	24) 85 367 : 26;
3) 70 000 : 52;	14) 63 000 : 72;	25) 479 535 : 63;
4) 7 389 : 82;	15) 4 839 : 64;	26) 236 831 : 674;
5) 9 036 : 36;	16) 2 014 : 56;	27) 543 765 : 823;
6) 36 865 : 73;	17) 5 673 : 72;	28) 234 876 : 632;
7) 22 644 : 51;	18) 5 329 : 95;	29) 204 356 : 913;
8) 28 208 : 82;	19) 4 768 : 92;	30) 743 567 : 256;
9) 14 847 : 49;	20) 5 401 : 67;	31) 4 536 754 : 543;
10) 11 556 : 36;	21) 2 001 : 45;	32) 27 483 624 : 6 211;
11) 18 606 : 31;	22) 7 302 : 86;	33) 63 123 257 : 6 832.

ОТВЕТЫ:

```
                ЧД
                 Е
1) 5   6   7   8  : 41 = 1 3 8
      16  37  28
   5  15  34  (20)

                  Ч Д
                    Е
2) 4   8   7   1  : 7  4 = 6 5

         47  61
      48 43 (61)

                     Ч Д
                       Е
3) 7   0   0   0   0 : 5  2 = 1 3 4 6
      20  30  40  10
   7  18  24  32  (8)
```

4) 7 3 8 9 : 8 2 = 9 0
08 09
73 0 (9)

5) 9 0 3 6 : 3 6 = 2 5 1
20 03 06
9 18 3 (0)

6) 3 6 8 6 5 : 7 3 = 5 0 5
08 36 05
36 3 36 (0)

7) 2 2 6 4 4 : 5 1 = 4 4 4
26 24 04
22 22 20 (0)

8) 2 8 2 0 8 : 8 2 = 3 4 4
42 40 08
28 36 32 (0)

9) 1 4 8 4 7 : 4 9 = 3 0 3
08 14 07
14 1 14 (0)

10) 1 1 5 5 6 : 3 6 = 3 2 1
15 05 06
11 7 3 (0)

11) 1 8 6 0 6 : 3 1 = 6 0 0
06 00 06
18 0 0 (6)

12) 4 3 2 7 1 : 7 2 = 6 0 0
02 07 71
43 0 7 (71)

13) 8 1 0 3 5 : 9 5 = 8 5 3
50 33 05
81 50 28 (0)

14) 6 3 0 0 0 : 7 2 = 8 7 5

60 40 00
63 54 36 (0)

15) 4 8 3 9 : 6 4 = 7 **5**
43 39
48 35 (39)

Ч Д
Е

16) 2 0 1 4 : 5 6 = 3 5
41 54
20 33 (54)

17) 5 6 7 3 : 7 2 = 7 8
67 63
56 63 (57)

18) 5 3 2 9 : 9 5 = 5 6
62 09
53 57 (9)

19) 4 7 6 8 : 9 2 = 5 1
16 78
47 16 (76)

20) 5 4 0 1 : 6 7 = 8 0
10 41
54 4 (41)

21) 2 0 0 1 : 4 5 = 4 4
20 21
20 20 (21)

22) 7 3 0 2 : 8 6 = 8 4
50 82
73 42 (78)

23) 9 3 4 5 : 9 9 = 9 4
44 45
93 43 (39)

24) 8 5 3 6 7 : 2 6 = 3 2 8 3
15 23 16 17
8 7 21 8 (9)

25) 4 7 9 5 3 5 : 6 3 = 7 6 1 1
39 15 13 45
47 38 7 10 (42)

```
                    Ч Д
                      Е Д
                        Е
26) 2  3  6  8  3   1 : 6  7  4 = 3 5 1
          36 18 33  261
       23 34  9 26 (257)

27) 5  4  3  7  6   5 : 8 2 3 = 6 6 0
          53 17 66  585
       54 50  6 58 (585)

28) 2  3  4  8  7   6 : 6 3 2 = 3 7 1
          53 18 47  406
       23 45 10 40 (404)

                    Ч Д
                      Е Д
                        Е
29) 2  0  4  3  5   6 : 9  1  3 = 2 2 3
          24 43 85  766
       20 22 35 76 (757)

30) 7  4  3  5  6  7 : 2 5 6 = 2 9 0 4
       24 13 15 16 147
     7 23  1 11 14 (143)

31) 4  5  3  6  7  5 4:5 4 3 = 8 3 5 4
          23 36 37 65 534
       45 19 30 27 53 (532)

                              Ч Д
                                Е Д
                                  Е Д
                                    Е
32) 2  7  4  8  3 / 6  2    4 : 6 2 1 1 = 4 4 2 4
          34 28 43 76 622 6 164
       27 26 16 31 62 616 (6 160)

33) 6  3  1  2  3 / 2  5    7 : 9 8 3 2 = 6 4 2 0
          51 32 13 32 185  1 817
       63 42 20  3 18 181 (1 817)
```

Глава шестая

ВОЗВЕДЕНИЕ В КВАДРАТ И ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ

ВОЗВЕДЕНИЕ В КВАДРАТ

Двузначные числа

Найти квадрат двузначного числа, вроде 73, легко. Это даже довольно просто сделать путем прямого умножения. Мы могли бы просто сказать: «73 умножить на 73» — и применить наш метод быстрого умножения, показанный в одной из предыдущих глав:

$$\begin{array}{l} 0\ 0\ 7\ 3 \times 7\ 3 \\ 5\ 3\ 2\ 9 \end{array}$$

Но сейчас мы изложим еще более быстрый и простой способ получить этот результат. Разберем вначале два специальных случая.

Случай 1. Числа, оканчивающиеся на 5, возводятся в квадрат следующим образом:

1) Последние две цифры квадрата — 25. Запишем сперва 25, оставив впереди немного места. Например, 35 в квадрате равно 25.

2) Чтобы найти первые две цифры искомого квадрата, умножим первую цифру данного числа на число, большее ее на единицу. Скажем, у числа 35 первая цифра 3, следовательно, мы умножаем 3 на 4. Это дает 12. Мы ставим 12 впереди 25. Ответ: 1225.

В случае с 65 мы можем себе действие представить так:

$$\begin{array}{lcc} & 6 & 5 \\ & (6 \times 7) & \Big| \\ & \downarrow & \downarrow \\ \text{Ответ:} & 42 & 25 \end{array}$$

Случай 2. Числа, начинающиеся на 5. Квадрат такого числа вычисляется так:

1) Последние две цифры ответа находятся возведением в квадрат последней цифры данного числа. Скажем, для числа 56 мы имеем .. 36, так как 6, умноженное на 6, будет 36.

2) Первые две цифры ответа — это 25 плюс последняя цифра данного числа. Для числа 56 мы получаем 25 + 6 = 31. Это число 31 ставится перед 36; окончательный ответ: 3136.

Если квадрат последней цифры есть однозначное число, мы ставим перед ним нуль. Например:

$$\begin{array}{cc} 5 & 1 \\ (25+1) & \\ \downarrow & \\ 26 & 01 \end{array}$$

Ответ: 2601.

Переходя к общему случаю, прежде всего мы воспользуемся той же схемой, что и в разобранных выше случаях. А именно:

1) Чтобы найти последние две цифры ответа, мы по-прежнему будем возводить в квадрат последнюю цифру числа.

2) Чтобы найти первые две цифры ответа, нам тоже придется возводить в квадрат первую цифру числа. Но этого оказывается недостаточно.

3) Теперь придется использовать еще так называемое «перекрестное произведение». Мы его получаем от перемножения обеих цифр данного числа. При возведении в квадрат 34 перекрестное произведение даст нам 12 ($3 \times 4 = 12$).

Опишем теперь общую схему на примере вычисления 32^2.

Первый шаг. Возводим в квадрат правую цифру:

$$\begin{array}{r} 3\ 2^2 \\ \hline 4 \end{array}$$

2, умноженное на 2, равно 4.

Второй шаг. Перемножим обе цифры числа и результат удвоим: 3, умноженное на 2, это 6, после удвоения будет 12:

$$\begin{array}{r} 3\ 2^2 \\ \hline {}^{\cdot}2\ 4 \end{array}$$

Как и при умножении, мы записываем 12 в виде 2 с точкой (вместо 1, подлежащей переносу).

Последний шаг. Возведем в квадрат левую цифру числа:

$$\begin{array}{r} 3\ 2^2 \\ \hline 10\ {}^{\cdot}2\ 4 \end{array}$$

3, умноженное на 3, плюс единица, равно 10.

Пример. Вычислить 84^2.

Первый шаг.

$$\begin{array}{r} 8\ 4^2 \\ \hline {}^{\cdot}6 \end{array}$$

4, умноженное на 4, равно 16.

Второй шаг.

$$\begin{array}{r} 8\ 4^2 \\ \hline {}^{6}5\ 6 \end{array}$$

8, умноженное на 4, равно 32; удвоить — получим 64, да еще плюс единица.

Третий шаг.

8 4²

7 0 5 6 *8 в квадрате—это 64; плюс перенесенное 6—будет 70.*

Разумеется, как и в вычислениях, описанных в предыдущих главах, практика постепенно приводит к тому, что все бо́льшая часть промежуточных вычислений делается в уме.

Попробуйте для контроля решить самостоятельно следующий пример: 43^2. Сверьте теперь то, что вы написали с этой схемой:

$$\begin{array}{ccc} 4 & & 3 \\ \hline 16 & 24 & 09 \\ 18 & & 4\ 9 \end{array}$$

24—это дважды 4, умноженное на 3.

Конечно, эта общая схема применима и в рассмотренных вначале частных случаях. Например, вычисление 35^2 будет теперь выглядеть так:

$$\begin{array}{ccc} & 3\ \ 5 & \\ \hline 09 & 30 & 25 \\ 12 & & 25 \end{array}$$

Трехзначные числа

Предположим, мы хотим найти квадрат числа 462. Нам все еще могут пригодиться приемы, которые мы научились применять к двузначным числам:

1) Мы по-прежнему можем использовать квадрат каждой цифры в отдельности. Вспомним, как выше, при возведении в квадрат числа 32, мы использовали 9 (3×3) и 4 (2×2):

$$\begin{array}{ccc} 3 & & 2 \\ \hline 09 & 12 & 04 \\ & 1\ 0\ 2\ 4 & \end{array}$$

12 — это 3, умноженное на 2 и удвоенное.

Теперь при трехзначном числе 462 мы возьмем квадрат 4 (16), квадрат 6 (36) и квадрат 2 (4).

2) Мы по-прежнему можем использовать перекрестное произведение, которое по-прежнему удваиваем. При возведении в квадрат числа 32 мы, как было показано выше, имели 12 (удвоенное произведение 3 на 2). Теперь, в случае трехзначного числа, мы тоже пользуемся перекрестным произведением, но уже не одним, а несколькими, мы составляем все возможные пары из этих трех цифр:

Первый шаг. Забудем на время про 4 в числе 462; оставим только двузначное число 62. Как возводить в квадрат двузначные числа, мы знаем (цифра 4 у исходного числа стоит в скобках, поскольку мы пока ее не используем):

	(4)	6	2
Промежуточные числа:	36	24	04
Рабочее число:	3	8	44

Второй шаг. Этот шаг — новый. Образуем «открытое перекрестное произведение», перемножив первую и последнюю цифры числа 462, и результат удвоим:

$$4 \times 2 \times 2 = 16.$$

Прибавим это число к числу, образованному двумя левыми цифрами нашего рабочего числа:

$$\begin{array}{cccc} 4 & 6 & 2 & \\ \hline 3 & 8 & 4 & 4 \\ 5 & 4 & 4 & 4 \end{array}$$

Прибавим 16 : 38 + 16 = 54.

Последний шаг. Теперь забудем на время про 2 в числе 462. Поступим с числом 46 точно так же, как если бы мы возводили его в квадрат, но опустим возведение в квадрат правой цифры 6:

$$\begin{array}{cccccc} & & 4 & 6 & 2 & \\ \hline 16 & 48 & 5 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 4 & 4 \end{array}$$

Не возводите в квадрат 6!
Ответ: 213 444

Давайте теперь разберемся. Возводя в квадрат 462, мы сперва вычислили квадрат 62. Затем, не обращая внимания на цифру 2 в числе 462, вычислили квадрат 46. Так как 62 есть «конец» числа 462, то возведение в квадрат 62 дало нам конец (правую часть) ответа. Так как 46 есть «начало» числа 462, то оно нам дало начало (левую часть) ответа. Но поскольку 46 и 62 частично перекрываются, мы имеем в ответе одну общую внутреннюю часть. Уточним:

1) 6 в числе 462 встречается только один раз. Поэтому мы берем 36 (6 в квадрате) только один раз. Когда мы возводим в квадрат 46, то вторично 36 не вычисляем, так как уже использовали это число при возведении в квадрат числа 62.

2) Новым шагом явилось вычисление «открытого перекрестного произведения», которое образуется перемножением первой и последней цифр числа 462: $4 \times 2 \times 2 = 16$; это 16 должно быть прибавлено в середине, поэтому мы его прибавили в левой части квадрата 62.

На практике мы не будем перегружать вычисление такого рода пояснениями. Делается это, например, так:

$$\begin{array}{c}3\quad 2\quad 5\\ \hline 04\ \ 20\ \ 25\end{array}$$ *Пишем только подчеркнутые цифры!*

Рабочее число: $0\ \underline{6}\ \underline{2}\ \underline{5}$

$3\ 0$ *Удвоенное 3 × 5 от числа 325.*

$3\ \underline{6}\ \underline{2}\ \underline{5}$

$09\ 12\ \ 3\ \underline{6}\ \underline{2}\ \underline{5}$

Ответ: $\underline{1}\ \ \underline{05}\ \underline{6}\ \underline{2}\ \underline{5}$

Конечно, вспомнив, что конец нашего числа (25) относится к одному из разобранных в начале главы более простых специальных случаев, мы можем несколько упростить все вычисление (625 записываем в виде 0625):

$$\begin{array}{c}3\qquad 2\qquad 5\\ \hline \end{array}$$

$0\ \underline{6}\ \underline{2}\ \underline{5}$

$3\ 0$ *Удвоенное открытое перекрестное произведение*

$3\ \underline{6}\ \underline{2}\ \underline{5}$

$09\ 12\ 3\ \underline{6}\ \underline{2}\ \underline{5}$

Ответ: $10\ 5\ 6\ 2\ 5$

Попытайтесь самостоятельно вычислить 222^2.

(Такое «симметричное» число мы взяли пока для простоты. Не торопитесь смотреть ответ!)

$$\begin{array}{c}2\ 2\ 2\\ \hline 04\ 08\ 04\end{array}$$

Рабочее число: $0\ 4\ \underline{8}\ \underline{4}$

Затем прибавляем удвоенное открытое перекрестное произведение 2 на 2:

$$\begin{array}{c}2\quad 2\quad 2\\ \hline \end{array}$$

$\cancel{0}\ \cancel{4}\ \underline{8}\ \underline{4}$

$1\ \underline{2}\ \underline{8}\ \underline{4}$

$$\begin{array}{c}2\quad 2\quad 2\\ \hline \end{array}$$

$04\ \ 08\ \ 1\ \underline{2}\ \underline{8}\ \underline{4}$

Ответ: $\underline{4}\quad \underline{9}\quad \underline{2}\quad \underline{8}\quad \underline{4}$

Возведение чисел в квадрат, естественно, подготовляет нас к излагаемому ниже методу извлечения квадратного корня, хотя, конечно, там появляются и совсем новые моменты.

КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

Трехзначные и четырехзначные числа

Мы объединяем в одну группу трех- и четырехзначные числа, потому что как те, так и другие получаются в результате возведения в квадрат двузначных чисел (скажем, $12^2 = 144$; $37^2 = 1369$).

Начнем с простого примера: $\sqrt{6\ 2\ 5}$.

Первый шаг. Считая справа, отмечаем два разряда:

$$6/25$$

и работаем с цифрой (или цифрами) слева от черты. (При $\sqrt{1024}$ мы взяли бы 10/24.)

Второй шаг. Найдем наибольшее однозначное число, квадрат которого не превышает числа, отмеченного в первом шаге левой части. Это и будет первая цифра ответа. В данном случае —2:

$$\sqrt{6\ 2\ 5} = 2$$

Третий шаг. Возведем в квадрат первую цифру ответа и вычтем ее из левой части исходного числа (т. е. из 6):

$$\begin{array}{l} \sqrt{6\ 2\ 5} = 2 \\ \underline{4} \\ 2 \end{array}$$

Четвертый шаг. Возьмем половину полученной на третьем шаге цифры и припишем к ней нуль (получится 10). Затем разделим результат на первую цифру ответа ($10 : 2 = 5$).

Это — вторая цифра ответа:

$$\begin{array}{l} \sqrt{6\ 2\ 5} = 2\ 5 \\ \underline{4} \\ 2 \end{array}$$

Теперь мы имеем обе цифры ответа: 2 и 5, но задача еще не может считаться решенной.

Во-первых, мы должны еще убедиться в правильности последней цифры (5). Может случиться (как раньше, при делении), что эта цифра слишком велика или слишком мала, так что возможно придется еще исправлять ее.

Во-вторых, мы будем искать остаток, т. е. разность между исходным числом и наибольшим, не превышающим его точным квадратом.

Ситуация здесь такая же, как при делении; не удивительно, что и сами вычисления напоминают метод деления (вернее, определение остатка) из предыдущей главы.

П я т ы й ш а г. Возведем найденный нами ответ (25) в квадрат:

$$\frac{2\quad 5}{04\ 20\ 25}$$ *20—это удвоенное 2, умноженное на 5.*

Опустим теперь левую пару (04), а из оставшегося (20 и 25) образуем, как выше, «рабочее число»:

$$\begin{array}{l} 20\ 25 \\ 2\ 2\ 5 \end{array}\quad 0+2=2.$$

Вычтем теперь первую цифру этого «рабочего числа» (подчеркнутую 2) из нашей рабочей цифры (нижней):

$$\begin{array}{lll} \sqrt{6\quad 2\quad 5} & = & 2\quad 5 \\ \underline{4}\ 0 & & (\underline{2}\ 2\ 5) \\ 2 & & \end{array}$$ *Как и в делении, стрелка означает, что надо вычесть подчеркнутую 2.*

П о с л е д н и й ш а г. Сносим обе последние цифры данного числа. Мы только что при вычитании получили нуль. Сносим вслед за нулем цифры 2 и 5 от числа 625:

$$\begin{array}{l} 6\quad 2\ 5 = 2\quad 5 \\ \underline{4}\ 02\ 5 = (\underline{2}\ 2\ 5) \end{array}$$

Из этого числа (в нашем случае 025) вычитаем то, что осталось от «рабочего числа». Мы уже использовали 2, подчеркнутое в числе $\underline{2}25$. Теперь используем оставшиеся 25:

$$\begin{array}{lll} \sqrt{6\quad 2\ 5} = 2\quad 5 & \\ \underline{4}\quad 02\ 5\qquad (\underline{2}\ 25) & \\ 2\qquad 0\ 0 & \end{array}$$ *Остаток—нуль.*

Вычисление закончилось без остатка. Квадратный корень из 625 есть действительно 25. Рассмотрим еще один пример — найдем квадратный корень из 645.

П е р в ы й ш а г. Отмечаем два разряда (6/4 5).

В т о р о й ш а г. Найдем первую цифру ответа (3 — наибольшее число, квадрат которого меньше 6):

$$\sqrt{6\ 4\ 5} = 2$$

Т р е т и й ш а г. Вычитаем квадрат этого числа ($2 \times 2 = 4$).

$$\begin{array}{l} \sqrt{6\ 4\ 5} = 2 \\ \underline{4} \\ 2 \end{array}$$

Четвертый шаг. Возьмем половину этой последней цифры (нижней 2) и поставим позади неё нуль:

$$\begin{array}{l} \sqrt{6\;4\;5} = 2 \\ \;\;4 \\ \;\;\overline{2} \\ (10) \end{array}$$

Разделим теперь 10 на уже найденную нами цифру ответа ($10:2=5$). Это вторая цифра ответа (по крайней мере, пробная):

$$\begin{array}{l} \sqrt{6\;4\;5} = 2\;5 \\ \;\;4 \\ \;\;\overline{2} \end{array}$$

Пятый шаг (остаток и проверка). Используя только что найденный нами ответ, образуем вторую и третью пары цифр, как это делается при возведении в квадрат:

$$\begin{array}{llll} \sqrt{6\;\;4\;\;5} & = & 2\;\;5 & \\ \underline{4}\;0 & & (04\;20\;25) & \\ 2 & & (\underline{2}\;2\;5) & \end{array}$$

и вычитаем подчеркнутую 2. Затем сносим 45 и вычитаем из них 25 от числа 225:

$$\begin{array}{lll} \sqrt{6\;\;4\;5} & = & 2\;\;5 \\ 4\;\;04\;5 & & (20\;\;25) \\ \overline{2}\;\;\;2\;5 & & \\ \;\;\;\;\overline{2\;0} & & (2\,2\,5) \end{array}$$ *Остаток—20.*

Мы получили, что квадратный корень равен 25, остаток 20. Этот остаток «приемлем»—он меньше, чем ответ 25. Рассмотрим теперь пример с «неприемлемым» остатком:

$$\begin{array}{lll} \sqrt{6\;\;7\;6} & = & 2\;\;5 \\ 4\;\;07\;6 & & (20\;\;25) \\ 2\;\;\;2\;5 & & (2\;2\;5) \\ \;\;\;\;\overline{5\;1} & & \end{array}$$ *Остаток—51.*

Все действия, выполненные до остатка, тождественно совпадают с действиями, выполняемыми в предыдущем примере. Но остаток не должен быть больше, чем удвоенный ответ. А здесь у нас $51 > 50$.

Очевидно, что 5 (вторая цифра нашего ответа) мала. Попробуем переправить ее на 6:

$$
\begin{array}{llll}
\sqrt{6\;\;7\;\;6} & = & 2 & 6 \\
\underline{4}\;07\;\;6 & & (\cancel{0}\cancel{4}\;24\;36) & \\
2\;\;\underline{7\;\;6} & & (\underline{2}\;7\;6) & \\
\;\;\;0\;\;0 & & &
\end{array}
$$

Теперь—другое дело. Остаток — нуль.

Итак, квадратный корень из 676 в точности равен 26.

Найдем в качестве последнего примера квадратный корень из 2200:

П е р в ы й ш а г.

2 2/0 0

В т о р о й ш а г.

$\sqrt{2\;2\;0\;0} = 4$ *$4 \times 4 = 16$, а $5 \times 5 = 25$.*

Т р е т и й ш а г.

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{2\;2\;0\;0} = 4 \\
\underline{1\;6} \\
\;\;\;6
\end{array}
$$

Ч е т в е р т ы й ш а г.

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{2\;2\;0\;0} = 4\;7 \\
\underline{1\;6} \\
\;\;\;6 \\
(30)
\end{array}
$$

30, деленное на 4, есть 7.

П я т ы й ш а г (остаток и проверка).

$$
\begin{array}{llll}
\sqrt{2\;\;2\;\;0\;\;0} & = & 4 & 7 \\
\underline{1\;\;6}\;00\;\;0 & & (\cancel{1}\cancel{6}\;56\;49) & \\
\;\;\;\;6\;\;\underline{0\;\;9} & & (\underline{6}\;0\;9) &
\end{array}
$$

Мы не можем вычесть! 7, должно быть, чересчур много, так как мы не можем вычесть 9 из нуля. Поэтому уменьшаем ответ до 46 и пробуем:

$$
\begin{array}{llll}
\sqrt{2\;\;2\;\;0\;\;0} & = & 4 & 6 \\
\underline{1\;\;6}\;10\;\;0 & & (\cancel{1}\cancel{6}\;48\;36) & \\
\;\;\;\;6\;\;\underline{1\;\;6} & & (\underline{5}\;1\;6) & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;8\;\;4 & & &
\end{array}
$$

Остаток—84.

Поскольку 16 уже можно вычесть из 100, 46 — правильный ответ.

Иногда приходится искать «половину» нечетного числа:

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{3\;0\;2\;5} = 5. \\
\underline{\;2\;5\;} \\
\quad\;\; 5
\end{array}
$$

В таких случаях, пожалуй, стоит использовать «бо́льшую половину» («бо́льшая половина» числа 5 есть 3):

$$
\begin{array}{cccccccc}
\sqrt{3} & 0 & 2 & 5 & = & 5 & & 6 \\
\underline{2} & \underline{5} & & & & (\cancel{25} & 60 & 36) \\
 & 5 & & & & (\underline{6} & 3 & 6) \\
 & (30) & & & & & &
\end{array}
$$

Вычитание застопорилось: мы не можем вычесть подчеркнутое 6 из нашей рабочей цифры 5. Следовательно, 6 из нашего ответа слишком велико. Попробуем вместо этого 55:

$$
\begin{array}{cccccccc}
\sqrt{3} & 0 & 2 & 5 & = & 5 & & 5 \\
\underline{2} & \underline{5} & 02 & 5 & & (\cancel{25} & 50 & 25) \\
 & 5 & \underline{2} & \underline{5} & & (\underline{5} & 2 & 5) \\
 & & 0 & 0 & & & &
\end{array}
$$

Остаток—0.

Вычисление закончилось без остатка, квадратный корень из 3025 в точности равен 55.

Пятизначные и шестизначные числа

Теперь уже ясно, по какому принципу мы объединяем исходные числа — по количеству знаков искомого результата (корня).

Для нахождения всех трех цифр ответа в интересующих нас теперь случаях не требуется ничего нового. Нами используются те же приемы, которые мы применяли к трех- и четырехзначным числам в предыдущем разделе. Новое появится только в последней части вычисления, когда мы будем искать остаток (эта часть необходима еще и потому, что она служит для проверки последней цифры ответа). Изредка нам придется возвращаться и уменьшать последнюю цифру на единицу. Обратите внимание, насколько начало вычислений похоже на то, что делали раньше:

Пример 1. Найдем квадратный корень из 207 936. Отметим по две цифры:

20/79/36

П е р в а я ц и ф р а о т в е т а. 4, умноженное на 4, меньше 20, но 5, умноженное на 5, больше 20. Следовательно, наша первая цифра — 4:

$\sqrt{2\ 0\ 7\ 9\ 3\ 6} = 4$

16

4

(20) *Половина от 4 есть 2, припишем нуль.*

В т о р а я ц и ф р а о т в е т а. Разделим полученное число 20 на 4. Получим 5:

$\sqrt{2\ 0\ 7\ 9\ 3\ 6} = 4\ \ 5$

16 (~~16~~ 40 25)

4 4 2 5

Это тот же метод возведения в квадрат, которым мы пользовались ранее. 40 — это 4, умноженное на удвоенное 5, а 25 — это квадрат 5. При возведении в квадрат мы должны были разбить с последующим сложением три таких двузначных числа; здесь же, при извлечении квадратного корня, мы пользуемся только последними двумя. Разумеется, все дело в том, что первое число мы уже использовали. Это 4 в квадрате, или 16, а мы 16 вычли ранее, при первом шаге.

П о с л е д н я я ц и ф р а о т в е т а. Вычтем 4 от числа 425, идя вверх, и 2 от числа 425, идя вниз:

$\sqrt{2\ 0\ 7\ 9\ 3\ 6} = 4\ \ 5$

1 6 07 4 2 5

4 5

(2или3)

(20или30)

Когда приходится брать половину нечетного числа (в данном случае 5), мы не знаем, брать ли нам «меньшую половину» или «большую»; 2 или 3. Обычно в таком случае лучше всего «разделить разницу»: после того, как приписан нуль, мы вместо 20 или 30 используем 25 и делим это число на первую цифру нашего ответа. 25, деленное на 4, дает 6; это — последняя цифра ответа:

$\sqrt{2\ 0\ 7\ 9\ 3\ 6} = 4\ 5\ 6$

1 6 07 4 2 5

4 5

(25)

Мы получили все три цифры ответа. Заметьте, что мы не пользовались никакими приемами, отличными от тех, которые применялись для меньших чисел, дававших нам двузначные ответы. Единственное отличие, встретившееся в этой задаче, — «разделение разницы». Но этот прием бывает полезен и при меньших, и при больших числах.

Займемся теперь остатком и проверкой вычислений. Здесь мы снова используем рассмотренные ранее открытые перекрестные произведения, для получения которых мы перемножаем первую и последнюю цифры трехзначного ответа, с последующим удвоением результата:

$$
\begin{array}{lll}
\sqrt{2\;0\;\;7\;9\;3\;6} & = & 4\;\;5\;6 \\
\underline{1\;6}\;07 & & 4\;25 \\
\quad 4\;\;5 & & \;\;\;48 \\
 & & \;\;\;\;6\;3\;6 \quad \textit{4} \times \textit{6, удвоенное, смотри ниже.}
\end{array}
$$

Число 636 получается из перекрестного произведения 56:

$$
\begin{array}{c}
5\quad 6 \\
60\;\;36 \\
\hline
6\;3\;6
\end{array}
$$

После некоторой тренировки эти перекрестные произведения без всякого труда вычисляются в уме. Как только мы получили ответ, мы можем сразу же снести все отставшееся от исходного числа:

$$
\begin{array}{lll}
\sqrt{2\;\;0\;\;7\;\;9\;\;3\;\;6} & = & 4\;\;\;5\;\;\;6 \\
\underline{1\;\;\;6}\;07\;19\;\;3\;\;6 & & \cancel{4}\;\cancel{2}\;5 \\
\quad 4\;\;5 & & \;\;\underline{4}\;8 \\
 & & \;\;\;\;6\;3\;6
\end{array}
$$

Мы вычеркнули 4 и 2 из числа 425, потому что мы их уже использовали при вычитании из нашего рабочего числа. Теперь мы используем подчеркнутую 4 открытого перекрестного произведения (48), а затем вычеркиваем 4 в числе 48. Наконец, остается только

$$
\begin{array}{c}
5 \\
8 \\
6\;3\;6
\end{array}
$$

Сложим числа в вертикальном столбце:

$$
\begin{array}{r}
5 \\
8 \\
6 \\
1\;9\;3\;6
\end{array}
$$

Вычитаем результат (1936) из всего оставшегося рабочего числа:

$$\begin{array}{l}
\sqrt{207\ 936} = 4\ 5\ 6 \\
\quad\quad 19\ 3\ 6 \\
\quad\quad \underline{19\ 3\ 6} \\
\quad\quad 00\ 0\ 0 \qquad \textit{Остаток—нуль.}
\end{array}$$

Задача решена без остатка. Квадратный корень из 207 936 в точности равен 456.

Вот еще один пример, на этот раз уже без всяких разъяснений:

$$\begin{array}{llllll}
\sqrt{8\ \ 9\ \ 3\ \ 3\ \ 0\ \ 4} & = & 9 & 4 \\
\underline{8\ \ 1}\ 13 & & (7\underline{2\ \ 1}6) \\
\quad 8 & & \cancel{7}\ 3\ 6 \\
\quad (40)
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
\sqrt{8\ \ 9\ \ 3\ \ 3\ \ 0\ \ 4} & = & 9 & 4 & 5 \\
\underline{8\ \ 1}\ 13 & & \cancel{7}\ \cancel{3}\ 6 \\
\quad 8\ 10 \\
\quad\quad (50)
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\sqrt{8\ \ 9\ \ 3\ \ 3\ \ 0\ \ 4} & = & \underline{9\quad 4\quad 5} \\
\underline{8\ \ 1}\ 13\ 13\ \ 0\ \ 4 & & \cancel{7}\ \cancel{3}\ 6 \\
\quad\quad \underline{10\ \ 2\ \ 5} \\
8\ 10 & & \underline{9}\ 0 \\
 & & \quad\underline{4\ 2\ 5} \\
\quad \underline{2\ \ 7\ \ 9} & & 1\ 0\ 2\ 5
\end{array}$$

Остаток — 279. Все вычисления правильны: мы не натолкнулись ни на какие противоречия. Ни в одном месте нам не пришлось пытаться вычесть большее число из меньшего, а остаток 279 меньше ответа. Все верно.

Примеры для упражнений

1) $\sqrt{765} = ?$ 5) $\sqrt{7\ 888} = ?$ 8) $\sqrt{103\ 456} = ?$

2) $\sqrt{965} = ?$ 6) $\sqrt{4\ 569} = ?$ 9) $\sqrt{364\ 728} = ?$

3) $\sqrt{200} = ?$ 7) $\sqrt{46\ 500} = ?$ 10) $\sqrt{900\ 045} = ?$

4) $\sqrt{683} = ?$

Ответы:

1) $\sqrt{7\ \ 65} = 2\ \ 7$

$\underline{4}$ 06 5 (28 49)

2 9 3 2 9

3 $\overline{3\ 6}$ *Остаток—36.*

(15)

2) $\sqrt{9\ \ 65} = \underline{3\ \ 1}$

9 06 5 = 06 01

6 1 0 61

0 $\overline{\ \ 4}$ *остаток*

3) $\sqrt{2\ \ 00} = \underline{1\ \ \ 4}$

(08 16) *15 было бы слишком много.*

1 10 0 0 9 6

9 6

1 $\overline{\ \ 4}$ *остаток*

(05)

4) $\sqrt{6\ \ 83} = \underline{2\ \ \ 6}$

(24 36)

$\underline{4}$ 08 3 2 7 6 *Остаток. Наш первый ответ (25) дает остаток 58, который больше его; пробуем вместо него 26.*

7 6

2 $\overline{\ \ 7}$

5) $\sqrt{78\ \ 88} = \underline{8\ \ \ 8}$

(128 64)

$\underline{6\ 4}$ 18 8 13 4 4

4 4

1 4 $\overline{14}$ 4 *Остаток — 144.*

6) $\sqrt{45\ \ 69} = \underline{6\ \ \ 7}$

(84 49)

$\underline{3\ 6}$ 16 9 8 8 9

8 9

9 $\overline{8\ 0}$ *Остаток—80.*

7) $\sqrt{4\;6\;5\;0\;0} = \underline{2\;1\;5}$

	$\cancel{0}\;\cancel{4}\;1$	
4 06 5 0 0	$\cancel{2}\;0$	*Зачеркните 0, когда вычитаете 0 из 0*; зачеркните 4, когда вы ее вычитаете из 6 во втором столбце.*
$\underline{2\;2\;5}$	$\underline{1\;2\;5}$	
0* 2 2 7 5	2 2 2 5	

Остаток — 275.

8) $\sqrt{1\;0\;3\;4\;5\;6} = \underline{3\;2\;1}$

$\underline{9}$ 03 14 5 6	$\cancel{1}\;\cancel{2}\;4$
$\underline{10\;4\;1}$	0 6
1 1 4 1 5	0 4 1

Остаток — 415.

9) $\sqrt{3\;6\;4\;7\;2\;8} = \underline{6\;0\;3}$

$\underline{3\;6}$ 04 17 2 8	$\cancel{0}\;\cancel{0}\;0$
$\underline{6\;0\;9}$	$\cancel{3}\;6$
0 4 11 1 9	0 0 9

Остаток — 1119.

10) $\sqrt{9\;0\;0\;0\;4\;5} = \underline{9\;4\;8}$

$\underline{8\;1}$ 20 30 4 5	$\cancel{7}\;\cancel{3}\;6$
$\underline{17\;0\;4}$	$\cancel{1}\;\cancel{4}\;4$
9 17 13 4 1	$\underline{7\;0\;4}$
	1 7 0 4

Остаток—1341.

Семизначные и восьмизначные числа

Эти числа приводят к четырехзначным ответам. Мы будем производить вычисления по схеме, сходной с той, что была нами принята для двузначных и трехзначных ответов. Надо иметь в виду, что эта схема не неизменна. Мы точно ее придерживаемся, пока впервые знакомим с методом. После же того как метод усвоен, можно вносить изменения соответственно своему вкусу. Чаще всего такие изменения будут относиться к сокращениям; чем лучше мы усвоим метод, тем больше действий мы сможем проделывать в уме.

П р и м е р ы.

1) Первая цифра ответа есть цифра, квадрат которой находится как раз под первой цифрой или под первыми двумя цифрами числа:

$$\begin{array}{l} \sqrt{1\ 0\ 3\ 4\ 5\ 6} = 3 \\ \quad\ \ 9 \\ \quad\ \ \overline{1} \end{array}$$

Изменение: вы можете найти эту 3 и вычесть 9 в уме:

$$\begin{array}{l} \sqrt{1\ 0\ 3\ 4\ 5\ 6} = 3 \\ \quad\ \ 1 \end{array}$$

2) При нахождении других цифр ответа мы применили «перекрестные произведения»:

$$\begin{array}{lll} \sqrt{1\ 0\ 3\ 4\ 5\ 6} & = & 3\ \ 2 \\ \quad 1 & & (12\ 04) \end{array}$$

После небольшой тренировки мы сможем это тоже делать в уме. Так, глядя на 32, прямо в уме вычислим число 124. (Не забудьте *удвоить* перекрестные произведения!)

3) После того как найдены все цифры ответа, мы переходим к определению остатка. Приведенные выше примеры показали, что это делается одним вычитанием:

Остаток:

$$\begin{array}{cccccccc} \sqrt{1} & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 & = & \underline{3\quad 2\quad 1} \\ & & & 14 & 5 & 6 & & \cancel{1}\ 2\ 4 \\ & & & \underline{10} & \underline{4} & \underline{1} & & \cancel{0}\ 6 \\ & & & 4 & 1 & 5 & & \underline{0\ 4\ 1} \\ & & & & & & & 10\ 4\ 1 \end{array}$$

Вариант: мы могли вычитать последовательно сперва 10, затем 4, затем 1:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \sqrt{1} & 0 & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & = & \underline{3\quad 2\quad 1} \\ & & & & 14 & & 45 & & 416 & & \cancel{1}\ 2\ 4 \\ & & & (-10) & \downarrow & (-4) & \downarrow & & \downarrow & (-1) & \\ & & & & & & & & & & \cancel{0}\ 6 \\ & & & & 4 & & 41 & & 415 & & \\ & & & & & & & & & & \underline{0\ 4\ 1} \\ & & & & & & & & & & 10\ 4\ 1 \end{array}$$

Вообще для семизначных и восьмизначных (да и более длинных) чисел мы используем все приемы, использованные для меньших чисел, только с соответствующими вариациями[1].

---

[1] Читателю, усвоившему идею метода, не представит особого труда продумать и эти «соответствующие вариации», хотя, надо сказать, в изложении авторов они выглядят довольно громоздко. Вообще термин «система быстрого счета» по отношению к настоящей главе выглядит достаточно условным, а ценность ее значительно уступает предыдущим. Не желая загромождать изложение по существу ясных идей второстепенными подробностями, мы предпочли опустить конец этой главы при переводе. Добавим лишь, что для проверки авторы и здесь рекомендуют неоднократно упоминавшийся выше «метод суммы цифр». — *Прим. ред.*

Глава седьмая

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА[1]

В настоящей главе мы покажем, каким образом приемы, рекомендуемые системой Трахтенберга, могут быть обоснованы средствами элементарной алгебры. Мы остановимся лишь на некоторых правилах, полагая, что читателю при желании не представится труда провести аналогичное обоснование и для других правил.

При нашем обосновании мы будем исходить из общеизвестных свойств алгебраических выражений и их тождественных преобразований, основанных в свою очередь на свойствах арифметических и алгебраических операций.

ПРАВИЛО ДЛЯ ОДИННАДЦАТИ

Как вы помните, правило это гласит: «Прибавьте соседа», причем «соседом» считается цифра, стоящая непосредственно справа от той, которую вы в данный момент рассматриваете.

Для обоснования этого (и следующих) правила мы воспользуемся тем, что число a, запись которого в десятичной системе счисления имеет вид $a_0\ a_1\ a_2\ \dots\ a_{n-1}\ a_n$, равно

$$\sum_{i=0}^{n} a_i 10^{n-i} =$$

$$= a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n$$

(не теряя по существу в общности рассмотрений, мы ограничиваемся целыми числами; распространение полученных результатов на десятичные дроби предоставляется читателю).

[1] Эта глава подверглась при переводе более решительному сокращению, чем все предыдущие. Опущены общеизвестные факты, касающиеся тождественных алгебраических преобразований; все, что относится к самой системе Трахтенберга, оставлено. — *Прим. ред.*

Таким образом (подобные члены записываем друг под другом),

$$a\cdot 11 = 10a + a = a_0\cdot 10^{n+1} + a_1\cdot 10^n + a_2\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\cdot 10^2 + $$
$$+ a_n\cdot 10 + 0\cdot 10^{n+1} + a_0\cdot 10^n + a_1\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_{n-2}\cdot 10^2 +$$
$$+ a_{n-1}\cdot 10 + a_n = (a_0 + 0)\cdot 10^{n+1} + (a_1 + a_0)\cdot 10^{n-1} + \ldots +$$
$$+ (a_{n-1} + a_{n-2})\cdot 10^2 + (a_{n-2} + a_{n-1})\cdot 10 + (a_n + 0).$$

Как видите, коэффициенты при степенях 10 — это наши старые знакомые: «цифра + сосед». Нужны ли дальнейшие комментарии?

Вопрос читателю: сказанное выше, очевидно, является полным доказательством правила умножения на 11 лишь для случая, когда каждая из сумм «цифра + сосед» не превышает 9; а нельзя ли здесь предусмотреть и случай переноса единицы в старший разряд?

ПРАВИЛО ДЛЯ ШЕСТИ

Пусть для начала множимое состоит лишь из четных цифр:

$$a = a_0\cdot 10^n + a_1\cdot 10^{n-1} + a_2\cdot 10^{n-2} + \ldots + a_{n-2}\cdot 10^2 +$$
$$+ a_{n-1}\cdot 10 + a_n.$$

Тогда

$$a\cdot 6 = a(5+1) = a\left(\frac{10}{2} + 1\right) = \frac{a_0}{2}\cdot 10^{n+1} + \frac{a_1}{2}\cdot 10^n + \frac{a_2}{2}\cdot 10^{n-1} + \ldots +$$
$$+ \frac{a_{n-2}}{2}\cdot 10^3 + \frac{a_{n-1}}{2}\cdot 10^2 + \frac{a_n}{2}\cdot 10 + a_0\cdot 10^n + a_1\cdot 10^{n-1} + \ldots +$$
$$+ a_{n-1}\cdot 10 + a_n = \frac{a_0}{2}\cdot 10^{n+1} + \left(a_0 + \frac{a_1}{2}\right)\cdot 10^n + \ldots + \left(a_{n-1} +\right.$$
$$\left. + \frac{a_n}{2}\right)\cdot 10 + a_n.$$

Легко видеть, что коэффициентами разложения произведения $a\cdot 6$ по степеням 10 как раз и служат «цифра плюс половина соседа» (для симметрии обозначений мы, как и в предыдущем правиле, могли бы коэффициент при 10^{n+1} обозначить через $a_{-1} + \frac{a_0}{2}$, а при 1 — через $a_n + \frac{a_{n+1}}{2}$, причем «фиктивные» коэффициенты a_{-1} и a_{n+1}, разумеется, равны нулю). Поскольку все a_i, по предположению, четные, то все эти коэффициенты — целые числа.

Случай же, когда какие-либо из a_i — нечетные, легко сводится к предыдущему, так как соглашение прибавлять 5 к таким цифрам как раз и позволяет дополнять до единицы остающуся в скобках у соответствующего коэффициента половинку.

Правила умножения на 5 и на 7 доказываются совершенно аналогично; предоставляем это сделать читателю.

ПРАВИЛА ДЛЯ ДЕВЯТИ И ВОСЬМИ

Представьте 9 в виде $10 - 1$, а 8 в виде $10 - 2$, после чего вычислите $a \cdot 9$ и $a \cdot 8$, как это делалось выше. Отсюда немедленно вытекают формулировки искомых правил.

ВОЗВЕДЕНИЕ В КВАДРАТ

Разберем вначале два специальных случая возведения в квадрат.

1) Пусть $a = 10b + 5$.

Тогда $a^2 = 100b^2 + 100b + 25 = 100b\,(b + 1) + 25$, откуда и вытекает правило, сформулированное в главе 6.

2) Пусть теперь $a = 5 \cdot 10 + b$.

Тогда $a^2 = 2500 + 100b + b^2 = (25 + b) \cdot 100 + b^2$, что опять-таки дает правило главы 6.

Наконец, для любого двузначного числа $a = 10b + c$

$$a^2 = 100b^2 + 20bc + c^2;$$

и здесь мы легко усматриваем символическую запись уже знакомой нам формулировки[1].

---

[1] Уже не в первый раз авторы, подробно объясняя известные каждому школьнику факты (эти объяснения при переводе опущены), в тех случаях, когда заходит речь об обосновании правил, ограничиваются лишь простейшими случаями, апеллируя по поводу дальнейшего к здравому смыслу и образованности читателя. Правда, и сами по себе «правила возведения в квадрат» (глава 6) обрываются авторами на случае трехзначных чисел.

Напоминаем еще раз читателю, что настоящая книга, вопреки уверениям авторов, не является ни полным сводом «правил системы Трахтенберга», ни, тем более, их обоснованием. Сказанное в полной мере относится и к опущенному при переводе концу этой главы, посвященному «обоснованию» умножения «методом единиц и десятков». Идея этого обоснования читателю уже известна — она исходит просто-напросто из записи чисел в десятичной системе. Поскольку, однако, сами авторы ограничиваются в дальнейшем изложением примеров, не дающих новой информации о методе Трахтенберга, эту часть главы также было сочтено целесообразным опустить. — *Прим. ред.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, изложение системы элементарной математики по Трахтенбергу закончено. Если вы прилежно поработали, то в результате должны были усвоить по крайней мере минимум основных принципов этой новой системы. Нет никакого сомнения, что были моменты, когда предложенные приемы казались трудными, и это вполне естественно. Система Трахтенберга отличается от всего того, к чему вы привыкли, а отказываться от старых привычек и навыков нелегко. Немного терпения — и вы сможете это превозмочь, а затраченный труд многократно окупится приобретенными выгодами.

Больше других сумеют оценить новый метод те, кто преподает арифметику в начальной школе. Как видно из первой же главы, ничто нас больше не вынуждает забивать юные умы длительными повторениями простейших истин. Новая система дает нам возможность сохранить к предмету живой интерес и увлечь юного учащегося.

В этой книге предмет, разумеется, представлен с точки зрения взрослого; детям он должен излагаться немного иначе, с изменениями в акцентировке различных пунктов. Это интересная тема, но недостаток места не позволяет нам остановиться на ее деталях.

Но главное, что фактически все это детям уже преподавалось. Начиная с конца 40-х годов в Математический институт Трахтенберга поступала и проходила курс обучения одна группа за другой. В сущности, это началось еще раньше, когда Трахтенберг давал детям частные уроки. Потом уже он основал свой институт и преподавание стало вестись в классах со штатом ассистентов-учителей. Вместе они в течение нескольких лет разрабатывали детали и усовершенствовали метод преподавания.

Уже с самого начала результаты были самые отрадные. Учащиеся радовались вновь приобретенным навыкам и с воодушевлением двигались вперед. Если раньше их отталкивала монотонность, то сейчас их привлекало разнообразие приемов. Шаг за шагом, благодаря достигнутым ими успехам, рос интерес к занятиям. Мы сами видели, начиная с первой же главы, как много нового, привлекательного для учащихся в методе. В каждом шаге имеется что-то новое и в то же время всегда что-то схожее с предыдущим, обеспечивающее непрерывность, связность системы.

Ученики школы Трахтенберга успевали и по другим предметам. Интерес к чему-либо, как и антипатия, — заразителен. Те, кто не успевает в одном виде занятий, вскоре не взлюбят все занятия, возненавидят школу. Это естественная человеческая черта. По той же причине те, кто успешно учится, кто ежедневно прогрессирует и приобретает какие-то новые навыки, охотно берутся за изучение других дисциплин.

Мы бы рады были, если бы что-то в этом роде имело место во всех школах страны. Верно, конечно, что перемены в широком масштабе по многим причинам проводятся медленно. Трудно ожидать, что сколько-нибудь важные перемены в методах нашего народного образования произойдут в срок меньший, чем десятилетия. Но если их вводить хотя бы постепенно, — какая это была бы благодать! Дети были бы избавлены от угнетающей их неприятной работы, а предмет, который большинство из них считает самым трудным, значительно упростился бы. Для многих из них открылись бы поистине захватывающие перспективы.

При ведении необходимых каждому человеку расчетов быстрота и легкость системы Трахтенберга оказывают большую помощь. Но новый, усовершенствованный метод не только позволяет сократить время, затраченное на расчеты. Не менее важно то, что в системе Трахтенберга особое значение придается *правильности* расчетов. Как мы ранее указывали, вычисление нельзя считать законченным, пока мы не нашли *правильного ответа*, более того, пока мы не *доказали*, что нашли правильный ответ. Этот принцип в повседневной жизни редко соблюдается. Обычно результаты не проверяются; если же попытка и предпринимается, то путем повторения вычисления, а это слабая и ненадежная проверка. Мы уверены, что способы, разобранные в предыдущих главах, будут полезны читателю.

Наряду с проверкой, обнаруживающей и исправляющей ошибки, имеется другой путь повышения надежности. На протяжении всей книги мы стремились постепенно развивать способность *сосредоточиваться*. Эта способность является лучшей гарантией против ошибок, так что потребность в проверках, как таковых, становится все меньше.

Успешное освоение новых навыков придает учащимся чувство уверенности в своих силах, следствием которой неизменно бывает повышенный интерес к математике и к другим предметам. И это, пожалуй, самый важный из всех практических результатов системы Трахтенберга.

Мы убеждены, что с течением времени система Трахтенберга будет получать все более и более широкое признание.

СОДЕРЖАНИЕ

Энн Катлер и Рудольф Мак-Шейн

Редакторы *Ю. А. Гастев* и *М. Л. Смолянский*
Художник *Н. Н. Румянцев*
Художественный редактор *В. С. Эрденко*
Технический редактор *Н. Ф. Макарова*
Корректор *Т. Н. Смирнова*

* * *

Сдано в набор 24/IX 1966 г. Подписано к печати 15/IV 1967 г. 60×90. Типографская № 2. Печ. л. 8,5. Уч.-изд. л. 5,62. Тираж 40 тыс. экз. (Тем. план 1967 г. № 152.).

* * *

Издательство «Просвещение» Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Саратов, ул. Чернышевского, 59. Заказ 599.

Цена без переплета 26 коп., переплет 18 коп.